UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO
ELEN GRACIELE MARTINS

O PAPEL DA PERCEPÇÃO SONORA NA ATRIBUIÇÃO DE SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS PARA NÚMEROS RACIONAIS POR PESSOAS CEGAS E PESSOAS COM BAIXA VISÃO

SÃO PAULO
2010

UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO
ELEN GRACIELE MARTINS

O PAPEL DA PERCEPÇÃO SONORA NA ATRIBUIÇÃO DE SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS PARA NÚMEROS RACIONAIS POR PESSOAS CEGAS E PESSOAS COM BAIXA VISÃO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Bandeirante de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação da **Profª. Dra. Lulu Healy (Siobhan Victoria Healy).**

SÃO PAULO
2010

M342p Martins, Elen Graciele
O papel da percepção sonora na atribuição de significados matemáticos para números racionais por pessoas cegas e pessoas com baixa visão / Elen Graciele Martins. -- São Paulo: [s.n.], 2010.
108f; il.; 31 cm.

Dissertação de Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, Curso de Educação Matemática.
Orientadora: Profª. Dra. Lulu Healy (Siobhan Victoria Healy)

1. Aprendizes cegos 2. Objetificação 3. Calculadora musical 4. Números racionais 5. Pensamento narrativo. I. Título

CDD 510

ELEN GRACIELE MARTINS

O PAPEL DA PERCEPÇÃO SONORA NA ATRIBUIÇÃO DE SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS PARA NÚMEROS RACIONAIS POR PESSOAS CEGAS E PESSOAS COM BAIXA VISÃO

DISSERTAÇÃO APRESENTADA À UNIVERSIDADE BANDEIRANTE DE SÃO PAULO, COMO EXIGÊNCIA DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Presidente e Orientador

Nome: Dra. Siobhan Victoria Healy (Lulu Healy)

Titulação: Doutora em Educação Matemática (Universidade de Londres)

Instituição: Universidade Bandeirante de São Paulo

Assinatura:

____

2ª Examinador

Nome: Dra. Janet Bolite Frant

Titulação: Doutora em Educação Matemática (Universidade de Nova York)

Instituição: Universidade Bandeirante de São Paulo

Assinatura:

____

3ª Examinador

Nome: Dra. Mirian Godoy Penteado

Titulação: Doutora em Educação (Universidade de São Paulo)

Instituição: Universidade Júlio de Mesquita Filho

Assinatura: ____

Biblioteca
Bibliotecário:

Assinatura:____Data____/____/____

São Paulo, ___ de _________________ de 2010

Dedico este trabalho a minha filha Luisa e ao meu esposo Pedro, razões da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me proporcionado esta rica experiência, por colocar em minha vida pessoas especiais que me ajudaram a vencer mais esta etapa de minha vida.

Obrigada professora Dra. Lulu Healy pela orientação, incentivo, companheirismo e por compartilhar comigo momentos que foram fundamentais para realização deste trabalho.

Obrigada professora Dra. Janet Bolite Frant pelas sugestões e contribuições tanto no grupo de estudos como na banca de qualificação.

Obrigada professora Dra. Miriam Godoy Penteado por fazer parte da banca de qualificação e por suas sugestões e contribuições.

Obrigada a todos os professores e alunos do programa de pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN, por compartilharem comigo, nestes dois anos de estudo, momentos fundamentais para minha formação pessoal.

Obrigada às instituições que abriram suas portas para a realização desta pesquisa: Instituto de Cegos Padre Chico e Associação de Deficientes Visuais de Guarulhos - AdeviG.

Obrigada aos alunos Josiel, Cauan, Kelly, Lenon, Victor, Gabriel e aos voluntários Carlos e Gilmar por aceitarem fazer parte desta pesquisa.

Obrigada a Capes por financiar esta pesquisa.

Obrigada professor Dr. Cláudio Saiani por suas sugestões e contribuições e por indicar este caminho, sem suas sugestões não teria alcançado esta dádiva.

Obrigada a minha família pelo apoio e compreensão.

Obrigada Luisa, você é a luz que me motiva a melhorar sempre.

Obrigada Pedro, sem o seu amor nada disso seria possível.

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é investigar sobre a aprendizagem matemática de pessoas cegas e pessoas com baixa visão, especificamente a aprendizagem de números racionais por meio do som emitido por um software. O olhar dos pesquisadores estava voltado às diferentes representações dos números racionais e às reações e percepções de nossos sujeitos a estas representações. Buscaram como fundamentação teórica a Teoria da Objetificação proposta por Radford (2006; 2008), com sua concepção antropológica de pensamento e preocupação com as influências cultural e corporal sobre aprendizagem. Apontaram a importância do design do micromundo (Papert, 1985) Musi*CAL*colorida na resolução das atividades e nas respostas dos sujeitos às mesmas, destacando indícios de pensamento narrativo nas emoções e histórias nelas expressas (Healy e Sinclair, 2007). A metodologia utilizada foi o *Design Experiment (Cobb et al, 2003)* que considera que todos os elementos envolvidos no experimento (sujeitos, atividades, pesquisadores, design do micromundo etc.) fazem parte de uma só ecologia, onde a análise dos dados tem que levar em conta todas estas variáveis no processo percorrido para o desenvolvimento da pesquisa. A pesquisa envolveu 8 participantes: 6 adolescentes de uma instituição especializada na educação de pessoas cegas ou com baixa visão e 2 voluntários adultos ex-videntes. A análise dos dados indicou que, a partir das suas interações com o software Musi*CAL*colorida os sujeitos identificaram diferentes representações de número decimal (exato, periódico simples ou composto) guiados apenas pelo som. Em suas atividades foram observados indícios de um processo de objetificação no qual o som da calculadora tornou-se mais que uma simples música, ficando incorporado como símbolo do objeto matemático em estudo.

Palavras-Chave: Aprendizes cegos. Objetificação. Calculadora musical. Números racionais. Pensamento narrativo.

ABSTRACT

The aim of this work is to investigate the processes of mathematics learning of visually impaired individuals. More specifically, it involves examining their interactions around the concept of rational number, using a digital tool which represented such numbers musically. The project focuses on different representations of rational numbers and the reactions and perceptions of the research subjects to these representations. Theoretical support for the research was sought in the Theory of Obectification (Radford, 2006; 2008), with its anthropological conception of thinking and its attention to the influences of the body and culture on learning. The importance attributed to the design of mathematical microworld in the sense of Papert (1985) contributed to the creation of the software Musi*CAL*colorida. His constructionist perspective and particularly his views on the need for a syntonicity between mathematical representation and aspects of the body and the ego informed the analysis of participants interaction with the microworld, which also involved the identification of traces of narrative thinking, emphasising connections between the subjects affective reactions and the mathematical meanings they associated with the concept of rational number. The methodology employed was that of Design Experiment (Cobb et al, 2003), which considers that all the elements involved in the experiment (subjects, activities, researcher, design of microworld…) are part of the same learning ecology, and that the analyses of data should take into account all these variables. The specific experiments carried out during this research included eight participants, six adolescents and two adults. All the subjects participated on a voluntary basis. Analysis of the data indicated that, through their interaction with the software Musi*CAL*colorida, the subjects identified different representations of decimal numbers, on the basis of the sound emitted by the calculator. In their activities, indices of a process of objectification were discernable, in which the sound came to represent more than a simple piece of music. as it evolved into a sign for the mathematical object under study.

Keywords: Blind learners. Objectification. Musical calculator. Rational numbers. Narrative thinking.

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Após concluir o Ensino Médio, decidi cursar Licenciatura em Matemática entendendo ser esse um caminho para o qual possuía aptidão.

No ano de 2006, após concluir minha graduação e já lecionando em escolas estaduais de ensino fundamental e médio, fui convidada a fazer um curso de copista Braille. Aceitei o desafio de fazer o curso e parti para essa empreitada. Até então, nunca havia me preocupado, se quer parado para pensar, como pessoas que eram desprovidas de visão faziam para aprender matérias como Matemática, Física, Química, que têm várias relações com o campo visual. Durante meu curso, tive como monitora Marina (nome fictício), que tinha 23 anos, cursava psicologia, e possuía cegueira congênita. Passei a conversar muito com Marina sobre sua vida acadêmica. Em uma de nossas conversas ela relatou que teve grande dificuldade de aprender Matemática, atribuída por ela pela falta de interesse dos professores utilizarem recursos didáticos que lhe possibilitassem fazer alguma associação com o conteúdo trabalhado. Marina concluiu sua educação básica em escola regular e no que diz respeito à Matemática, diz ter sido "empurrada" para outras séries mesmo sem dominá-la. Disse que como tinha facilidade em matérias como Língua Portuguesa, História, Geografia e outras que, segundo ela, eram mais fáceis de aprender, os professores ficavam com "pena" de não promovê-la por causa das matérias de exatas. Fiquei muito preocupada com que Marina havia falado. Procurei me informar sobre o assunto e descobri que *a recomendação para que pessoas com deficiências sejam educadas na rede regular de ensino está prevista na Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), de 1996. (O Estado de São Paulo, 02/09/03).*

Sendo professora de Matemática não consegui parar de pensar nesse grupo de educandos que, embora pequeno, constitui parcela significativa da sociedade. O fato de termos que receber, na rede regular de ensino, alunos com necessidades especiais é preocupante, pois nós não tivemos no nosso curso de licenciatura o preparo necessário para lecionar para esse público tão diversificado e que requer uma atenção diferenciada. Então, ao ingressar no Programa de Mestrado Acadêmico em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN), resolvi fazer minha pesquisa voltada ao ensino de Matemática a educandos cegos ou com baixa visão, buscando entender melhor o processo de desenvolvimento cognitivo desses educandos.

Aproveitando minha experiência com uso de computadores, pois na minha graduação tive disciplinas ligadas à linguagem de programação, optei por fazer parte da linha de pesquisa Tecnologias Digitais e Educação Matemática. Fiz algumas leituras de trabalhos já realizados com alunos cegos ou com baixa visão, constatei que não é habitual o uso do computador como instrumento de ensino de Matemática a esse público. Após conversa com minha orientadora, decidi trabalhar em minha pesquisa com um software que possibilita trabalhar um dos conceitos que, segundo Lamon (2001), é um dos mais “complexos” que os educandos enfrentam em seus primeiros anos escolares: o conceito de número racional.

A partir das considerações acima, estudamos as interações dos alunos cegos ou alunos com baixa visão com o software Musi*CAL*colorida porque pretendemos responder as seguintes questões de pesquisa:

1) Quais propriedades dos números racionais são destacadas por esta ferramenta?

2) Existe relação entre conhecimento matemático e percepção sonora na atribuição de significados Matemáticos a Números Racionais por estes aprendizes?

Nosso trabalho está dividido da seguinte forma:

Capítulo 1: falamos sobre a aprendizagem matemática de alunos cegos ou com baixa visão discutindo a teoria da objetificação do conhecimento matemático (Radford, 2006; 2008), a utilização de micromundos (Papert, 1985) e narrativas (Healy e Sinclair, 2007) que contribuíram para a realização deste estudo.

Capítulo 2: é dedicado à descrição da metodologia utilizada em nossa pesquisa. Apresentamos as fases de desenvolvimento das atividades, a evolução da ferramenta computacional e a coleta de dados da Fase I e da Fase II.

Capítulo 3: fazemos nossa análise dos dados coletados nas Fases I e II, relacionando-os com nosso referencial teórico.

Capítulo 4: destacamos nossas conclusões com base na análise dos dados coletados.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo discorreremos sobre a aprendizagem de alunos cegos ou com baixa visão destacando as políticas brasileiras de inclusão desses alunos na rede regular de ensino e uma breve revisão das pesquisas já realizadas sobre sua aprendizagem matemática. A seguir, apresentaremos considerações sobre as perspectivas teóricas que formarão o design de nosso estudo, discutindo as idéias de Radford (2006; 2008) sobre a teoria da objetificação do conhecimento matemático, a noção de micromundos (Papert, 1985) e o papel das narrativas na atribuição de significados matemáticos (Healy e Sinclair, 2007).

1.1 Políticas brasileiras de inclusão

> "*A educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho*."
>
> (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB, lei n°9.394, de 20 de dezembro de 1996).

Atender as recomendações da LDB (1996) tem sido para instituições de ensino, educadores e familiares de alunos com necessidades especiais, uma busca contínua e árdua para garantir a eles as mesmas condições de acesso ao ensino que têm os alunos que não possuem necessidade de atendimento diferenciado. Em tese, as escolas regulares de ensino garantem esse direito, mas não atendem a solicitação da LDB em sua totalidade. Professores de escolas de ensino regular estão recebendo estes alunos sem ter nenhuma formação especializada, sem nenhuma preparação prévia. Chegamos às nossas classes e nos deparamos com a surpresa de contarmos com alunos que exigem um cuidado diferenciado, daí surge uma série de questionamentos de como fazer para que esses alunos não sejam "excluídos" dentro de uma tentativa de inclusão.

> *A educação pública tem responsabilidade com todas as crianças e isso inclui as portadoras de deficiência. À medida que jovens deficientes da visão são integrados nas escolas da comunidade, muitos professores regulares de sala de aula estarão trabalhando pela primeira vez com uma criança portadora de deficiência visual. (Artigo da Revista do Instituto Benjamin Constant, 1998).*

O levantamento de quantas pessoas cegas existe no Brasil, realizado pelo IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, divulgado no ano de 2000 apontou que cerca de 10% da população nacional têm algum tipo de deficiência visual e que deste total aproximadamente 30% correspondem a crianças em idade escolar. Recentemente, a Secretaria de Estado da Educação[1] de São Paulo (2008) divulgou que existem no estado cerca de 6.600 estudantes com deficiência visual matriculados na rede estadual de ensino.

Os dados apresentados por estes dois órgãos trazem a tona um problema grave, cuja solução não é responsabilidade exclusiva do estado, mas que demanda em uma mudança de pensamento e ações de toda a sociedade. A matrícula de pessoas com deficiência nas classes de ensino regular exige que além da secretaria de educação, toda a administração pública (secretarias da saúde, do esporte, da cultura etc.) deve fazer parte do processo de inclusão, colaborando no desenvolvimento dos alunos e tornando-os cada vez mais participadores ativos da sociedade.

Nós, professores da rede regular de ensino, devemos nos incluir nesse processo. Para isso é necessário que conheçamos o perfil desse público, em

[1]Dados publicados no site: http://www.educacao.sp.gov.br último acesso em 14/10/08.

especial, que sejam conhecidos seus processos de cognição, só assim seremos capazes de realizar nosso trabalho com segurança e com qualidade, direito de todos os alunos.

O enfoque desta pesquisa é a educação matemática de pessoas cegas ou com baixa visão. Na próxima seção deste capítulo faremos uma breve revisão de algumas pesquisas, no contexto brasileiro, já concluídas e que podem nos ajudar a conhecer melhor esse público.

1.2 Revisão dos trabalhos já realizados

Nosso estudo busca compreender como pessoas cegas ou com baixa visão constroem significados matemáticos para números racionais. Para nos ajudar, buscamos em pesquisas já realizadas indícios de como estes sujeitos constroem o pensamento matemático. Para compor este item escolhemos os trabalhos realizados por Calore (2008) que pesquisou a integração e inclusão de um grupo de pessoas cegas em duas instituições de ensino de uma cidade de São Paulo, Andrezzo (2005) que fez um estudo sobre o uso de padrões figurativos na aprendizagem de Álgebra por alunos sem acuidade visual, Fernandes (2004) que fez uma análise Vygotskiana da apropriação do conceito de simetria por aprendizes sem acuidade visual e Fernandes (2008) que desenvolveu, das experiências sensoriais aos conhecimentos Matemáticos, uma análise das práticas associadas ao ensino e aprendizagem de alunos cegos e com visão subnormal numa escola inclusiva.

Calore (2008) discutiu em sua pesquisa o papel da etnomatemática na inclusão de pessoas com deficiência visual. A coleta de dados foi realizada em duas instituições de ensino, uma de ensino regular e outra especializada no atendimento a pessoas com deficiência visual da cidade de São José do Rio Preto. A pesquisa contou com a participação de 6 alunos e uma professora da escola de ensino regular e 17 alunos frequentadores da instituição especializada no atendimento a deficientes visuais. A pesquisa mostrou como a convivência dos sujeitos nos dois ambientes, que são distintos em objetivos, faz com que eles tenham maneiras diferentes de pensar e resolver situações, por trazerem consigo saberes relacionado à cultura de onde estão inseridos. A autora concluiu que existe uma grande ligação entre a cultura do meio onde os sujeitos convivem e suas maneiras de pensar e resolver problemas.

Andrezzo (2005) propôs, em sua pesquisa, a investigação da compreensão de objetos algébricos, especificamente, sequência de padrões figurativos. Para a realização da pesquisa teve como participantes cinco sujeitos que realizaram as tarefas propostas pela pesquisadora por meio de uma prancha de metal e ímãs de diferentes formas geométricas em que os alunos, utilizando-se do tato, percebiam os padrões das sequências. A autora, apoiando-se nas idéias de Vygostky (1983) argumenta que crianças com deficiência são capazes de aprender se oferecidas a elas condições apropriadas (adaptadas) de ensino. Em sua pesquisa Andrezzo citou a importância da percepção tátil na aprendizagem desses sujeitos.

Fernandes (2004) fez um estudo com o objetivo de investigar os processos pelos quais aprendizes cegos se apropriam conceitos matemáticos, especialmente ligados ao conceito de simetria e reflexão. A pesquisa foi realizada com dois sujeitos: um com cegueira adquirida e um com cegueira congênita. Como Andrezzo, esta autora também utilizou como fundamentação teórica de seu trabalho as idéias de Vygostky, partindo da hipótese de que esses aprendizes têm o mesmo potencial que os videntes para apropriarem-se de noções ligadas a esses conceitos, desde que seu acesso seja viabilizado por instrumentos que substituam o olho. Foi utilizado o método da dupla estimulação de Vygotsky e o desenvolvimento de entrevistas baseadas em tarefas. A pesquisadora concluiu que a evolução dos significados associados à simetria e reflexão para aprendizes cegos dá-se de modo similar a dos aprendizes videntes, enfatizando, ainda, a importância da percepção tátil em todo o processo.

Em continuação ao trabalho feito no mestrado, em sua tese de doutoramento, Fernandes (2008) pesquisou a relação entre corpo e cognição de aprendizes sem acuidade visual. A pesquisa foi realizada em uma escola de ensino regular da cidade de São Paulo. Foram utilizadas nessa pesquisa tarefas matemáticas, ferramentas materiais e semióticas para o trabalho de um conteúdo relacionado à Geometria. As análises foram realizadas com base na investigação das práticas matemáticas dos sujeitos quando trabalhavam a matemática escolar, com o objetivo de compreender como as ferramentas semióticas podem ser usadas para constituir novas práticas e explorar a importância do que é percebido pelos sentidos na produção de conhecimentos. Em suas conclusões, a autora aponta que por um lado as práticas atuais nem sempre permitem uma participação ativa dos deficientes visuais e, por outro, um possível caminho para criar uma Educação Matemática mais inclusiva. A autora também enfatiza a utilização do corpo, principalmente da percepção tátil no processo cognitivo dos sujeitos envolvidos. Nesta pesquisa, Fernandes buscou uma teoria contemporânea que ao mesmo tempo avança a perspectiva Vygostkiana e contempla as especificidades associadas com aprendizagem matemática. Ela optou por buscar apoio na teoria da objetificação de Luis Radford.

Os pesquisadores citados acima concordam sobre a importância do corpo e da cultura dos sujeitos em sua aprendizagem. As pesquisas citam a utilização de materiais/artefatos como instrumentos de mediação para explorarem a percepção tátil dos sujeitos envolvidos para o trabalho com conteúdos matemáticos. Apesar de já existirem algumas pesquisas sobre a aprendizagem de pessoas cegas ou com baixa visão, a ênfase no conhecimento matemático tem ocorrido por meio do sistema háptico e, a percepção sonora, elemento importante no desenvolvimento cognitivo desses aprendizes, não é explorada. Então, nossa pesquisa terá como enfoque a percepção sonora de alunos cegos ou com baixa visão utilizando o computador como ferramenta para trabalhar conteúdos matemáticos. As pesquisas citadas têm forte influência do trabalho de Vygostky, assim como Fernandes (2008), escolhemos investir na teoria da objetificação de conhecimento para interpretar os processos de aprendizagem dos sujeitos envolvidos neste estudo.

1.3 A teoria da objetificação do conhecimento

> *A cegueira é um tipo de deficiência sensorial e, portanto, sua característica mais central é a carência ou comprometimento de um dos canais sensoriais de aquisição da informação, neste caso o visual. Isto, obviamente, tem conseqüências sobre o desenvolvimento e a aprendizagem, tornando-se necessário elaborar sistemas de ensino que transmitam, por vias alternativas, a informação que não pode ser obtida através dos olhos. (...) A carência ou a séria diminuição da captação da informação, por um canal sensorial da importância da visão, faz com que a percepção da realidade de um cego seja muito diferente da dos que enxergam. Boa parte da categorização da realidade reside em propriedades visuais que se tornam inacessíveis ao cego, mas isto não quer dizer que careça de possibilidade para conhecer o mundo ou para representá-lo; o que o ocorre é que, para isso, deve potencializar a utilização dos outros sistemas sensoriais. Ochaita e Rosa (1995, p.183).*

Partindo da definição de cegueira dada pelos autores Ochaita e Rosa (1995), buscamos, com esta pesquisa, compreender como pessoas sem este recurso sensorial aprendem, especialmente como aprendem matemática. Para nos ajudar a delinear este processo, buscamos uma teoria que pudesse sustentar este trabalho: a Teoria da ***Objetificação*. ** Criada pelo pesquisador Luis Radford (2006; 2008), a teoria da objetificação afirma que o pensamento é uma prática social. Nesta teoria, pensar é considerado como uma reflexão mediada do mundo de acordo com a forma ou modo de atividade de cada indivíduo. Radford (2008) argumenta que os aprendizes trazem consigo experiências culturais e tais experiências influenciam suas formas de aprendizagem. Objetificação é o processo de transformar um “objeto” (artefato, símbolo, gesto, palavra etc.) em signo, atribuindo-lhe um papel de mediador na construção do conhecimento. Tamanha a importância do *signo* na aprendizagem, dentro desta teoria, que o autor o define como parte ou extensão do sujeito. Radford admite que a ligação entre o sujeito e o signo é tão forte que é considerado por ele como algo *sensual*[2], ou seja, a construção do pensamento não ocorre somente no plano cerebral humano, nem mesmo pode ser considerada uma

---

[2] Sensual aqui tem a conotação de algo que faz parte do corpo. Tradução dada por Radford em contato pessoal com as pesquisadoras. Substituiremos no texto a palavra *sensual* por sensorial por considerar mais adequada esta tradução para o português.

coisa essencialmente individual. Mesmo sendo sentido corporalmente, o pensamento também ocorre no plano social, materializado pelo signo. Isto porque o processo de atribuir ao signo o papel de mediador, denominado objetificação, envolve todo o corpo, ultrapassando a barreira de qualquer sentido – visão, audição, tato, olfato e paladar – envolve o campo perceptivo como um todo. Nesta teoria, o signo é considerado parte integrante e indissociável do pensamento (Radford, 2006). Para nosso trabalho, suas reflexões sobre corpo e cognição são pertinentes. Optamos por utilizar esta teoria por causa da atenção dada à ligação entre os saberes matemáticos adquiridos por nossos sujeitos com suas experiências de vida e como isso é refletido em seus gestos, falas e registros, ou o que Radford denomina de sistemas culturais semióticos de significação.

Para explicar o papel desses sistemas no processo de objetificação de conhecimento matemático Radford (2006) apresenta o seguinte esquema (Figura 1).

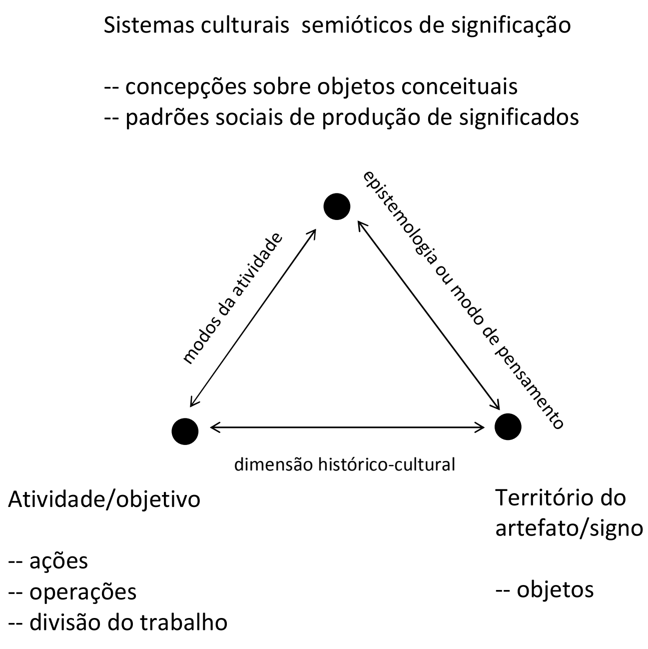

Figura 1: Sistema culturais semióticos de significação, Radford (2006, pág. 109)

As flechas mostram a interação entre os sistemas semióticos culturais com a atividade e a zona do signo (objetos) e dessa interação surgem os modos da atividade e do pensamento, de tal maneira que em um movimento dialético alimentam os vértices do triângulo. Segundo esta teoria:

> *A aprendizagem não consiste em construção ou reconstrução do conhecimento. Trata-se de atribuir sentido a objetos conceituais que fazem parte da cultura do aprendiz. A aquisição do saber é um processo de elaboração ativa de significados. (IBID., p. 113) (Tradução nossa)*

Esta citação deixa clara a tentativa de Radford de se distanciar da perspectiva construtivista, ao invés de construir conhecimento, a aprendizagem envolve a apropriação do conhecimento incorporado nos artefatos e sistemas semióticos da cultura vivenciada. Entretanto, é importante destacar que nesta visão, o aprendiz não é um mero participante passivo em um processo já estabelecido de aprendizagem ou apropriação. Para cada aprendiz, existem objetos diferentes que construirão seu modo de pensar sobre algo e este processo é percebido somente através se suas ações. Tal ação pode ser um gesto, uma fala ou um registro escrito. O som emitido por um software, por exemplo, pode ser considerado um objeto que potencialmente conduz um indivíduo a uma reflexão, que pode resultar em uma aprendizagem – e que pode ser diferente em cada indivíduo. O significado dado a um objeto é assim algo particular, embora que muitos elementos do sistema cultural semiótico sejam compartilhados entre membros de um mesmo grupo, e assim pode ter significado comum para um grupo ou até para uma sociedade. Essa variação depende do significado desse objeto em cada cultura. Considere o caso de uma flecha. Uma flecha é um instrumento da cultura indígena, onde é utilizada para caçar ou que esta mesma flecha pode ser um “símbolo” de amor para um casal apaixonado, pode ser um instrumento de competição de um atleta, uma sinalização de trânsito ou um símbolo matemático. O significado dado a este objeto – flecha – depende da cultura e do contexto em que está inserido.

Por se tratar de sujeitos cegos, já é de nosso conhecimento que a percepção tátil é um dos principais canais de aprendizagem utilizado. E até agora parece que, nas pesquisas em Educação Matemática, é este canal que tem atraído maior atenção. Entretanto, acreditamos que não representa o único canal que poderia ser explorado no processo de objetivação desses aprendizes. Assim, decidimos trabalhar com uma abordagem diferente da habitual, não utilizando somente a percepção tátil, mas vários ou todos os sentidos que são possíveis para estes aprendizes. Em particular, buscamos maneira para providenciar um acesso aos objetos e relações matemáticas através do senso sonoro. A este respeito, estávamos levados a considerar as possibilidades oferecidas por ferramentas digitais, já que com as mesmas a estrutura dos objetos matemáticos, talvez tradicionalmente apresentada simbolicamente podem ser vivenciadas de uma forma mais *sensorial*. Procuramos na literatura conceituações referentes à aprendizagem que concordem com a teoria da objetificação relacionado com a importância do corpo no processo de aprendizagem que também contemplam as mudanças possíveis no contexto da tecnologia digital. Encontramos no trabalho de Papert com computadores e micromundos e no trabalho de Healy e Sinclair sobre narrativas, perspectivas que traz alguns elementos que podemos associar com a posição de Radford. Discutiremos a seguir essas perspectivas.

1.4 O uso do computador como ferramenta de ensino e Narrativas

No campo da Educação, especialmente da educação de pessoas com necessidades especiais, o uso do computador como ferramenta pedagógica teve início nos anos 1970. Nos Estados Unidos, nesta época, uma corrente de trabalho com computador centrou-se na utilização de uma linguagem de programação chamada *Logo.* Destacamos em particular um estudo que se iniciou em 1975 no qual um menino autista trabalhou com esta linguagem. (Valente, 2001, pág. 29)

Segundo Valente:

> *O computador pode ser um recurso flexível, passível de ser adaptado às diferentes necessidades de cada indivíduo. Ele se torna o caderno eletrônico para o deficiente físico, (...) um meio que o surdo pode usar para estabelecer relações entre o fazer e os conceitos utilizados nestas ações, (...) um instrumento que integra diferentes representações de um determinado conhecimento para o deficiente visual, (...) mediador da criança autista e o mundo, (...) um objeto de desafio para a criança deficiente mental (...) e o recurso com o qual a criança carente pode realizar-se e participar efetivamente de atividades socioculturais significativas. (...) sendo o computador uma ferramenta de trabalho com o qual o aluno resolve problemas, escreve, desenha etc., essas atividades passam a ser importantes fontes de diagnóstico e avaliação da capacidade intelectual de sujeitos com diferentes tipos de necessidades especiais. (Ibid., p. 29 – 30)*

Esta possibilidade e flexibilidade do uso do computador citada por Valente nos levou a uma reflexão de como esta ferramenta pode ser útil na aprendizagem de alunos cegos ou com baixa visão. Além de tornar acessível às atividades com a utilização, por exemplo, de softwares como o Virtual Vision[3], também possibilita a utilização de softwares com propósitos educacionais, como é o caso da Musi*CAL*colorida.

Nossas leituras sobre a utilização do computador para fins educacionais, nos levaram aos trabalhos de Seymor Papert, mais especificamente ao que ele denomina micromundo. Na opinião de Papert, "*o computador pode concretizar (e personalizar) o formal". (Papert, 1985, pág. 37).* Para Papert, algumas dificuldades encontradas em aprender matérias formais devem-se a dificuldade do aluno de entender a utilidade deste estilo de pensamento (formal), que com utilização dos micromundos tornam-se explícitos. Nesses ambientes de aprendizagem o conhecimento que só é acessível através de processos formais torna-se concreto, e Papert atribuiu a esse processo o fato destes ambientes incluírem elementos

[3] É um programa que permite aos deficientes visuais utilizar o ambiente Windows, seus aplicativos Office, e navegar pela Internet com o Internet Explorer.

necessários para tornar alguém um “pensador formal”. (ibid., pág. 44). Esta característica permite ao aluno, não só a construção de conhecimento, mas a construção de um produto concreto, tornando algo abstrato “palpável”. Isso faz com que o produto final tenha a assinatura intelectual de cada aprendiz trazendo à tona sua criatividade e capacidade de progresso (Valente, 2001, pág. 31). E este produto traz consigo duas características: a *sintonicidade corporal* e a *sintonicidade com o ego*. (Papert, 1985, pág. 87). A sintonicidade corporal está relacionada à percepção e ao conhecimento que o aprendiz tem de seu corpo. A sintonicidade com o ego está relacionada com o sentido que o aprendiz dá a si mesmo, seus objetivos, desejos, metas, vontades, tristezas etc. (ibid., pág. 87).

Embora que o trabalho de Papert originalmente surgiu no contexto Piagetiano, e, portanto construtivista, parece para nós que sua preocupação com o papel do artefato (neste caso o computador) no processo de aprendizagem aproxima suas idéias com a perspectiva Vygotskiana. Mais especificamente, o micromundo pode ser visto como um exemplo de um sistema semiótico de significação e a construção pelo aprendiz de uma extensão para o micromundo envolve a criação que um modelo de seu pensamento com marcas do plano corporal e cultural. A sintonicidade com o corpo destacada por Papert pode ser relacionada com o processo de objetificação de Radford no sentido de que para ambos a relação entre sujeito e signo é algo *sensorial,* e sintonicidade com o ego por ter relação com a visão que o indivíduo tem de si próprio, envolvendo, além dos sentidos físicos, sentidos psicológicos. Esta segunda idéia é pouco explorada no campo da Educação Matemática. Uma hipótese levantada por Healy e Sinclair (2007) é que para compreender esta sintonicidade devemos interpretar o mundo do aprendiz por meio das *narrativas* produzidas por eles. Para as autoras, “*se alguma coisa é realmente significativa para alguém, então ele terá estórias que expressem estes significados”.* Para que as falas sejam consideradas como narrativa ou estórias, ela deve conter quatro características (Bruner, 1997):

<u>*Ter uma sequência inerente*</u>: possui uma estrutura com começo, meio e fim, onde exista uma ligação temporal entre os eventos.

Poder ser real ou imaginário: os fatos podem existir somente no mundo imaginário, somente no mundo real ou ter elementos de ambos.

Criar conexões entre o excepcional e o ordinário: Tentativa de expressar algo complexo de maneira mais simples, utilizando termos e expressões que dêem sentido particular a um contexto.

Possuir uma qualidade dramática: os acontecimentos ou ações realizadas pelos protagonistas das estórias devem conter emoções, sentimentos, verdades e crenças.

Para Healy e Sinclair a utilização de micromundos nos quais objetos matemáticos e suas relações são experienciados através de vários sentidos e por meio de diferentes manifestações – dinâmica, visuais, sonoras, gráficas etc. – pode favorecer o surgimento de narrativas e estas podem nos mostrar como os aprendizes "enxergam o mundo", e, para nosso trabalho em especial, como a Matemática é descrita em seus mundos e como dão significado a ela.

Nos trabalhos de Radford, Papert e Healy e Sinclair encontramos destacados a importância do corpo e do senso que o aprendiz tem de si mesmo, cada um enfatizando aspectos diferentes: Radford cita em sua teoria que um objeto/signo se torna parte (do corpo) do aprendiz durante o processo de objetificação; Papert com relação à sintonicidade, onde o aprendiz é capaz de criar, aprender, construir, realizar dentro de um micromundo coisas que não seriam possíveis no "mundo real"; Healy e Sinclair enfatizam em seu trabalho a relação que existe entre as estórias contadas pelos aprendizes e a relação que existe entre o que estes pensam de si ou como se vêem no mundo.

Escolhido o referencial teórico da pesquisa, foi necessário definirmos o conteúdo matemático específico que iríamos trabalhar, para isso, pesquisamos em dois documentos que são utilizados como referências no estado de São Paulo: os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a proposta curricular adotada pelo estado de São Paulo. Em ambos buscamos um conteúdo que se destacasse na formação dos aprendizes. Assim, encontramos o conteúdo Números Racionais.

Discutiremos a seguir a definição e o que o PCN+ do Ensino Médio e a Proposta Curricular do estado de São Paulo (2008) falam sobre este tema.

1.5 Nosso enfoque matemático

Verificamos que o ensino de números racionais está previsto na educação básica de todos os brasileiros, por meio dos PCN+ do Ensino Médio (2002), que destacam no item habilidades e competências a serem desenvolvidas nesta fase escolar nos aprendizes a capacidade de:

> ***Identificar,transformar e traduzir*** *adequadamente valores e unidades básicas apresentadas sob diferentes formas como* ***decimais em frações ou potências de dez****, litros em metros cúbicos, quilômetros em metros, ângulos em graus e radianos. (grifo nosso)*
>
> *Identificar diferentes formas de quantificar dados numéricos para decidir se a resolução de um problema requer cálculo exato, aproximado, probabilístico ou análise de medidas. Por exemplo, de acordo com uma dada situação, escolher número de algarismos apropriado ou fazer aproximações adequadas,* ***optar pelo uso de fração, porcentagem,potência de dez; escolher melhor unidade para representar uma grandeza.*** *(grifo nosso)*

Na proposta curricular do estado de São Paulo, adotada no ano de 2008, o ensino de números racionais está previsto em todas as séries do ensino fundamental II como mostra o quadro apresentado a seguir:

CONTEÚDOS DE MATEMÁTICA POR SÉRIE/BIMESTRE DO ENSINO FUNDAMENTAL

	5ª série	6ª série	7ª série	8ª série
1º bimestre	**NÚMEROS NATURAIS** - Múltiplos e divisores. - Números primos. - Operações básicas (+, −, ×, ÷). - Introdução às potências. **FRAÇÕES** - Representação. - Comparação e ordenação. - Operações (+, −, ×, ÷).	**NÚMEROS NATURAIS** - Sistemas de numeração na Antiguidade. - O sistema posicional decimal. **NÚMEROS NEGATIVOS** - Representação. - Operações (+, −, ×, ÷). **NÚMEROS RACIONAIS** - Representação fracionária e decimal. - Operações com decimais e frações (×, ÷).	**NÚMEROS RACIONAIS** - Transformação de decimais finitos em fração. - Dízimas periódicas e fração geratriz. **POTENCIAÇÃO** - Propriedades para expoentes inteiros. - Problemas de contagem.	**NÚMEROS REAIS** - Conjuntos numéricos. - Números irracionais. - Potenciação e radiciação em R. - Notação científica.
2º bimestre	**NÚMEROS DECIMAIS** - Representação. - Transformação em fração decimal. - Operações (+, −). **SISTEMAS DE MEDIDA** - Medidas de comprimento, massa e capacidade. - Sistema métrico decimal: múltiplos e submúltiplos da unidade.	**GEOMETRIA** - Ângulos. - Polígonos. - Circunferência. - Simetrias. - Construções geométricas.	**EXPRESSÕES ALGÉBRICAS** - Equivalências e transformações. - Produtos notáveis. - Fatoração algébrica.	**ÁLGEBRA** - Equações do 2º grau: resolução e problemas. **FUNÇÕES** - Noções básicas sobre funções. - A idéia de variação. - Construção de tabelas e gráficos para representar funções de 1º e 2º graus.
3º bimestre	**FORMAS GEOMÉTRICAS** - Formas planas. - Formas espaciais. **PERÍMETRO E ÁREA** - Unidades de medida. - Perímetro de uma figura plana. - Cálculo de área por composição e decomposição. - Problemas envolvendo área e perímetro de figuras planas.	**PROPORCIONALIDADE** - Variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais. - Conceito de razão. - Porcentagem - Razões constantes na geometria: π. - Construção de gráficos de setores. - Problemas envolvendo probabilidade.	**EQUAÇÕES** - Resolução de equações de 1º grau. - Sistemas de equações e resolução de problemas. - Inequações do 1º grau. **GRÁFICOS** - Coordenadas: localização de pontos no plano cartesiano.	**PROPORCIONALIDADE NA GEOMETRIA** - O conceito de semelhança. - Semelhança de triângulos. - Razões trigonométricas.
4º bimestre	**ESTATÍSTICA** - Leitura e construção de gráficos e tabelas. - Média aritmética. - Problemas de contagem.	**ÁLGEBRA** - Uso de letras para representar um valor desconhecido. - Conceito de equação. - Resolução de equações. - Equações e problemas.	**GEOMETRIA** - Teorema de Tales. - Teorema de Pitágoras. - Área de polígonos. - Volume do prisma.	**CORPOS REDONDOS** - O número π; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo. - Volume e área do cilindro. **PROBABILIDADE** - Problemas de contagem e introdução à probabilidade.

Figura 2 - Quadro de divisão de conteúdo da proposta curricular do estado de São Paulo para o ensino fundamental II (2008).

As duas propostas citadas apontam para a necessidade do estudo de números racionais, destacando a importância de compreender suas diferentes representações.

1.5.1 Definição matemática de número racional

Lima (2008) define o conjunto dos números racionais, como sendo aquele formado pelas frações p/q, onde p e q pertencem a $\mathbb{Z}$, sendo q $\neq$ 0. O que simbolicamente podemos representar como:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} ; \mathbf{p} \in \mathbf{Z}, \mathbf{q} \in \mathbf{Z}, \mathbf{q} \neq \mathbf{0} \right\}$$

Assim, o conjunto dos números racionais contém os números naturais e os números inteiros.

Há quatro formas de se apresentarem os números racionais:

Frações (próprias ou impróprias): com numerador menor que o denominador (própria), exemplo : $\frac{3}{4}$ e com numerador maior que o denominador (imprópria), exemplo: $\frac{7}{3}$.

Números mistos (que é uma variação das frações impróprias): constituído por uma parte inteira e uma fracionária, exemplo: $3\frac{1}{2}$.

Números decimais de escrita finita, exemplo: 1,234; 3,0 (parte decimal nula).

As dízimas periódicas: que são números decimais em cuja escrita aparecem períodos numéricos infinitos, exemplos: 8, 23...; 1,23555...; 7,23965....

Existem inúmeras pesquisas nacionais e internacionais que tratam do tema números racionais. Nosso interesse em focar nosso estudo no conceito de números racionais se deve ao fato de alguns autores defenderem que o conceito de números racionais é complexo e que sua aprendizagem envolve diferentes significados/construtos em diferentes perspectivas. Dentre os autores que chamam a atenção para este fato estão Kieren (1976; 1988; 1994) e Nunes e Bryant (2003) que destacam que a compreensão de números racionais envolve a construção de sub-significados/sub-construtos, ou seja, pequenos conceitos que formam o conceito maior.

Segundo Kieren, que foi o primeiro a expor a idéia dos sub-construtos, existem sete interpretações para números racionais (Rodrigues, 2005) e estas estão assim definidas:

- Podem ser somados, subtraídos, comparados etc;
- Extensão do sistema decimal de numeração (representação decimal);
- Existência de classes de equivalência de frações (representar a mesma quantidade de forma utilizando frações diferentes);
- São números escritos na forma p/q, com p e q inteiros e $q \neq 0$;
- São operadores multiplicativos;
- São elementos de um conjunto de quociente infinito;
- São medidas ou pontos na reta numérica.

Posteriormente Kieren propôs a existência de apenas cinco sub-construtos: parte-todo, razão, operador, quociente e medida. Estes cinco sub-construtos foram assim definidos:

Parte-todo: situação em que uma quantidade contínua ou um conjunto de objetos discretos são divididos em partes (tamanho) iguais.

Razão: considerado como uma comparação entre duas quantidades.

Operador: números racionais são considerados como funções aplicadas a um número, objeto ou conjunto.

Quociente: fração é o resultado de uma divisão, na qual o numerador define a quantidade a ser partilhada e o denominador define as partições da quantidade.

Medida: transmite a idéia de que fração é um número; também está associado com a medição da distância de certo ponto sobre uma reta.

Nosso estudo não tem a intenção de discutir sobre todos os sub-construtos e suas definições, mas, de utilizar a idéia de que entender as diferentes representações dos números racionais pode facilitar sua compreensão, portanto, trataremos à fração como uma divisão, e esta característica é próxima do sub-contruto quociente dada por Kieren.

As pesquisas citadas apontam para o fato dos alunos não reconhecerem a representação fracionária como sendo a representação de um número, de uma quantidade. Propomos então, tratar os números racionais em três manifestações diferentes: como uma relação (divisão entre dois números inteiros), sua representação decimal e sua representação fracionária.

Assim, nosso objetivo é que os aprendizes compreendam que o mesmo número poder ser representado de várias formas – como processo ou como resultado de uma operação, aparecendo tanto na forma de fração como na forma de decimal.

Para nós é importante que o aluno consiga, por exemplo, dizer que o número 0,2 pode ser representado pelas frações $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{100}{500}$ etc., e pelas divisões $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{10}$ etc., por expressarem a mesma quantidade, ou seja, todas são diferentes maneiras de escrever o número 0,2.

Apresentamos neste capítulo a fundamentação teórica de nosso estudo. Apresentamos também o conteúdo matemático de números racionais, suas diferentes representações e seu destaque nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN e na proposta curricular adotada pelo estado de São Paulo em 2008.

Nesta pesquisa estamos interessados em estudar o papel da percepção sonora na atribuição de significados matemáticos a números racionais por alunos cegos ou com baixa visão. Pretendemos também, identificar as narrativas produzidas pelos alunos diante da abordagem matemática proposta, buscando entender seu papel na aprendizagem e sua contribuição para a construção de conhecimentos e significados matemáticos.

No próximo capítulo trataremos da metodologia de pesquisa adotada e da ferramenta tecnológica que utilizamos nesse estudo.

CAPÍTULO 2

A METODOLOGIA *DESIGN EXPERIMENT*

Com base na visão de uma pesquisa qualitativa, adotaremos o *Design Experiments* como metodologia de nosso estudo. *Design Experiment envolve tentativas para permitir certas formas de aprendizagem e ao mesmo tempo fazer um estudo desse processo, permitindo ao pesquisador traçar um perfil específico de aprendizagem dos sujeitos envolvidos (Cobb et al, 2003).*

As fases de um experimento se organizam em ciclos, a cada ciclo os participantes - professores, estudantes e pesquisadores - têm a condição de refletirem sobre suas ações e, dentro desta metodologia, o papel do pesquisador é promover os ajustes necessários para alcançar os resultados esperados. As atividades não são fixas, são moldadas em função das ações dos sujeitos e suas interações com o meio. Cada vez que as atividades são remodeladas, os dados coletados para chegar a uma nova atividade também são analisados pelo pesquisador e todo o processo é levado em consideração nas análises. Descrever erros cometidos pelos alunos, problemas ocorridos antes, durante e depois das interações, intervenções feitas pelos pesquisadores, por professores participantes e por pessoas alheias à pesquisa fazem parte do que podemos considerar a *ecologia de aprendizagem*. A metáfora de ecologia é utilizada para enfatizar como o foco da pesquisa é um "*sistema complexo e interativo, envolvendo múltiplos elementos de diferentes tipos e níveis. Isto ocorre por meio da modelagem de seus elementos e da antecipação de como esses elementos funcionam em conjunto, para dar suporte à aprendizagem*" (Karrer, 2006). É importante também destacar que dentro desta ecologia há vários fatores que podem influenciar no resultado da pesquisa e que nem sempre estão dentro da possibilidade de controle do pesquisador. Nesta metodologia, a cada variável que é mudada, o aspecto do contexto nos quais os dados estão coletados também muda, tendo então que constar em nossas análises qual contexto estamos considerando para tais resultados.

Dentro da metodologia de design, segundo Cobb (2003), existem cinco pontos relevantes que merecem destaque:

- A tentativa de desenvolver uma teoria de aprendizagem que consiga delinear todo o processo ocorrido - a participação dos sujeitos da pesquisa, o desenrolar das atividades e intervenções realizadas;

- Propor novas formas de aprendizagem, permitindo uma reflexão sobre todo o processo, desde a sugestão de novos modelos educacionais a possibilidade de intervenção nos já existentes;

- Os aspectos prospectivo e reflexivo desta metodologia. Onde o pesquisador parte de uma conjectura inicial (prospectivo) e durante os ciclos do design pode testá-la e a partir dos resultados julgar se será necessário descartá-la;

- O caráter cíclico, onde a cada experimento podemos re-visitar nossas conjecturas e criar novos modelos visando atingir um objetivo específico (reflexivo).

As teorias desenvolvidas nesta metodologia estão relacionadas a um domínio específico do processo de aprendizagem, e também estão diretamente ligadas aos participantes da pesquisa.

Pelo fato de nossa proposta ter por objetivo analisar os processos de aprendizagem do conteúdo de números racionais, desenvolvido no interior de um ambiente complexo e múltiplo, adotamos como metodologia de nossa pesquisa o *Design Experiment.*

2.1 Contexto da pesquisa:

Para participantes do experimento, a priori escolhemos estudantes do Ensino Fundamental II que possuíssem cegueira ou baixa visão. Nossa escolha teve por pré-requisito que constasse em suas vidas acadêmicas, algum contato com números Racionais.

Devido a problemas na primeira fase, o experimento contou com oito participantes, sendo que seis deles participaram somente da primeira fase e dois deles participaram somente da segunda fase. Para a primeira fase, escolhemos trabalhar com seis adolescentes em fase escolar e para a segunda fase, com dois adultos que já concluíram a educação básica.

As atividades foram realizadas em duplas, uma vez que tínhamos a intenção de analisar também a interação aluno-aluno e as possíveis narrativas que surgiriam entre estes. Na primeira fase do design houve um professor acompanhando os alunos e dois pesquisadores. Na segunda fase os participantes foram acompanhados somente por um pesquisador.

2.1.1 Institucional

Nossa pesquisa foi composta por duas fases e cada fase foi realizada em instituições distintas. A seguir, caracterizamos cada instituição envolvida.

2.1.2 Instituto de Cegos Padre Chico

A primeira fase da pesquisa foi realizada no Instituto de Cegos Padre Chico, localizado no bairro do Ipiranga em São Paulo. Esta instituição é especializada no ensino a deficientes visuais e vem desde o ano de 1928, ano de sua fundação, colaborando para o desenvolvimento de seus alunos. É uma entidade filantrópica de assistência social, cristã e educacional a deficientes visuais e suas famílias. Desde sua fundação é administrado pelas Filhas da Caridade de São Vicente de Paulo que até hoje vêm prestando este serviço com amor e fé à sociedade.

A instituição tem capacidade para receber alunos cegos e alunos com baixa visão desde o período preparatório até o ensino Fundamental II, oferecendo-lhes além das disciplinas do currículo da educação básica, que são oferecidas pela manhã, contam ainda na parte da tarde com atividades como: estimulação precoce; período preparatório para ingresso na educação básica; informática; datilografia comum e Braille; esportes como a natação, futebol e goalball[4]; karatê; musico - grafia Braille; banda; violão; teclado; piano; banda rítmica; coral infantil e infanto-juvenil e formação religiosa. Também possuí atendimentos odontológico, psicológico, fonoaudiológico e fisioterapêutico, além de acompanhamento pela coordenação pedagógica e orientação educacional. Nossa convivência com os alunos e com a equipe do Instituto foi muito rica. Observamos o cuidado que a instituição tem com seus alunos e a qualidade nos serviços prestados à sociedade.

Fomos muito bem recebidas pela direção do instituto e por sua equipe de funcionários.

O Instituto possui ampla sala de informática, com equipamentos atuais e equipe técnica de apoio.

[4] É um esporte praticado exclusivamente por atletas portadores de deficiência visual. O jogo é praticado em quadra coberta, por duas equipes de três jogadores cada, onde o objetivo é arremessar com as mãos uma bola sonora, especialmente fabricada para este esporte, até o gol.

2.1.3 Associação de deficientes visuais de Guarulhos - AdeviG

A Associação de deficientes visuais de Guarulhos é uma OnG – organização não governamental - criada no ano de 1999, com a finalidade de oferecer apoio a deficientes visuais e seus familiares.

A entidade atende pessoas da cidade de Guarulhos, além de atender o público dos municípios de Arujá, Santa Isabel, Itaquaquecetuba e Mairiporã.

Dos objetivos da OnG estão: a defesa dos direitos, integração e cidadania dos portadores de deficiência visual, através de sua inserção na sociedade como cidadãos; prestar assistência social, psicológica, fisioterápica e orientação profissional; desenvolver projetos psicopedagógicos adequados a cada faixa etária e fase de desenvolvimento dos deficientes visuais. Dos serviços prestados pela instituição destaca-se também o apoio a prática de esportes pelos deficientes.

Possui audioteca e Biblioteca Braille onde títulos de livros gravados e escritos em Braille são emprestados aos usuários.

Localizada em um prédio antigo, não possui estrutura adequada para atender seu público. Necessita de reformas estruturais e de materiais básicos como computadores novos, sofás, mesas, cadeiras etc. A instituição sobrevive de doações e da arrecadação de verba em eventos que organiza.

Fui bem recebida na instituição por todos que compõem sua estrutura.

A AdeviG é freqüentada principalmente por pessoas que perderam a visão na fase adulta. Não temos o número exato de quantas pessoas a OnG atente.

2.2 Dos Sujeitos

Caracterizamos neste item os sujeitos envolvidos na fase I e II da pesquisa. A pedido dos sujeitos, optamos por manter seus nomes.

2.2.1 Fase I

Nesta fase contamos com seis adolescentes, três com cegueira congênita e três com baixa visão, abaixo fazemos uma breve descrição de cada sujeito[5].

- Victor -14 anos: Aluno do 9º ano do ensino fundamental, seu primeiro ano no instituto, possuía um problema na retina (não relatado por ele a patologia em questão) que foi corrigido com cirurgia no ano de 2008. Possuía cerca de 95% de visão, por opção da família continuou o ano letivo na instituição.

- Kelly – 13 anos: Aluna do 9º ano do ensino fundamental possui cegueira congênita. Kelly no início da pesquisa mostrou-se muito tímida, só falava quando era estimulada com alguma pergunta. Podemos constatar que ao final da pesquisa ela já estava muito mais segura, falante e participativa.

- Gabriel – 14 anos: Aluno do 9ª ano do ensino fundamental possui cegueira congênita. Foi aluno de escola regular até a 4ª série de ensino fundamental I. Contou-nos um pouco se sua trajetória escolar, onde relatou que sofria muito nas escolas de ensino regular. Percebemos desde o primeiro encontro sua timidez que aos poucos foi sendo vencida por seu interesse pela pesquisa.

- Lennon – 14 anos: Aluno do 9ª ano do ensino fundamental, segundo sua professora de Matemática, possui dificuldade de aprendizagem nesta disciplina. Possui cerca de 15% de visão e sua patologia ainda não foi

---

[5] As informações foram dadas pelos sujeitos em uma entrevista informal. Alguns sujeitos optaram por não responder as questões.

descoberta. Lennon é um aluno extrovertido, falante e que mostrou muito interesse em participar do experimento.

- Josiel - 13 anos: Aluno do 9º ano do ensino fundamental, possui cegueira congênita. Falante, interessando e sempre alegre, contagia todos com sua vontade de vencer. Sempre disposto a colaborar nos projetos da escola e com os colegas. Josiel tem muita facilidade em aprender qualquer coisa, segundo sua professora de Matemática.

- Cauan – 13 anos: Aluno do 9º ano do ensino fundamental possui cerca de 7% de visão, sua habilidade visual limita-se apenas a enxergar vultos. Aluno comunicativo, solícito e extrovertido, possui facilidade para interagir com os colegas.

- Professora Solange: Professora de Matemática da instituição há 17 anos. Possui grande afinidade com os alunos. Sua participação no experimento foi de grande importância, passando segurança aos seus alunos e nos apoiando sempre que necessário.

2.2.2 Fase II

Nesta fase contamos com dois voluntários adultos que faziam curso de Braille na AdeviG.

- Carlos – 54 anos: Possui cegueira total adquirida aos 51 anos de idade por decorrência de Diabetes. Formado em Matemática, lecionou durante 16 anos em escolas de educação básica da rede estadual da cidade de Guarulhos. Busca atualmente (2009) fazer cursos na AdeviG para recolocação no meio social e no mercado de trabalho.

- Gilmar – 34 anos: Possui cegueira total adquirida aos 31 anos de idade por decorrência de Diabetes. Cursou a educação básica em escola de ensino regular e chegou a ingressar em um curso superior de Administração de Empresas. Cursou 1 ano e desistiu para fazer cursos ligados a área de informática, que é sua paixão. Atualmente (2009) é voluntário em uma instituição de apoio a pessoas com deficiência onde leciona aulas de informática.

2.3 Das atividades – nossa hipótese inicial:

Após pesquisa bibliográfica sobre o tema escolhido, e entrevista com a professora de Matemática Solange, que leciona para alunos cegos e com baixa visão na escola que participou na primeira fase, constatamos a dificuldade dos alunos, videntes ou não, em compreender as formas de representação dos números racionais. Nossa hipótese inicial é que os participantes envolvidos no experimento consigam, auxiliados pela ferramenta computacional escolhida, perceber as diferentes representações dos números racionais (fracionária, decimal exata, dízima periódica simples, dízima periódica composta).

2.4 O papel das pesquisadoras

Sugerir modificações no design do micromundo e a elaboração das atividades propostas foram atribuições das pesquisadoras, bem como levantar questionamentos que conduzissem os envolvidos nas etapas da pesquisa. Na Fase I da pesquisa contamos com a participação da professora de Matemática dos aprendizes envolvidos, que em momentos de dúvidas (relacionadas com o conteúdo matemático escolhido) recorriam a ela. Portanto, a participação das pesquisadoras foi mais restrita a explicação das atividades e do software. Na Fase II da pesquisa, não contamos com a participação de outras pessoas além dos dois sujeitos envolvidos. Também não realizamos a pesquisa em ambiente escolar.

Nessa fase, assumimos o papel de professora/pesquisadora, auxiliando os envolvidos tanto em questões técnicas (da atividade ou do software, bem como a função de digitadora) quanto a questões relacionadas ao conteúdo matemático trabalhado.

2.5 A ferramenta utilizada – Micromundo Musi*CAL*colorida

A primeira versão do Micromundo Musi*CAL*colorida foi criada pela pesquisadora Nathalie Sinclair (2006). Em sua versão Sinclair trabalhava somente a parte visual oferecida pela calculadora: uma grade colorida onde cada número é representado por uma cor (Figura 3). Sinclair trabalhou neste micromundo as concepções que alunos de um curso de formação de professores para lecionar em escolas primárias tinham sobre números racionais. A calculadora, antes só colorida, foi um instrumento muito útil na pesquisa realizada por Sinclair. Ela pôde perceber que ao trabalhar neste Micromundo, os professores que faziam o curso buscavam compreender o que realmente acontecia com o número, o porquê de cada algoritmo. Conjecturavam e ali mesmo, no Micromundo, provavam suas hipóteses. A pesquisa realizada por Sinclair serviu de grande inspiração para trabalhos com o Micromundo da Calculadora de Cores.

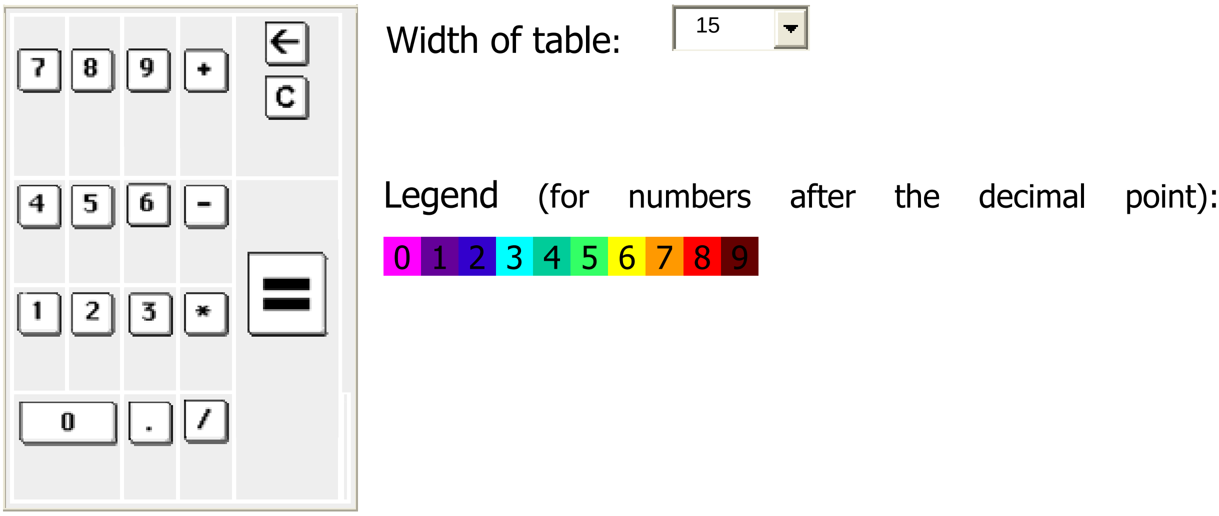

Figura 3: Calculadora de cores-1ª versão.

Para que este micromundo fosse utilizado por um público mais diversificado, Lulu Healy e sua equipe de pesquisadores decidiram atribuir mais uma característica a este micromundo: emitir sons (Rodrigues, 2008). Este avanço foi necessário para que este micromundo fosse utilizado por sujeitos com diferentes características de aprendizagem, tornando-a um instrumento de mediação entre o professor e o aluno e o aluno e o objeto matemático em questão.

A Musi*CAL*colorida em seu procedimento de uso não se difere muito de uma calculadora comum. Entretanto, na tela do computador, ela apresenta diferentes representações para um número decimal: além da representação convencional, cada dígito corresponde a uma cor distinta e um som diferente, som este que pode ser modificado, pois a calculadora tem como opção o som de vários instrumentos musicais.

Ao realizarmos a operação $\frac{52}{99}$ temos o seguinte resultado:

0,52525252525252525252...

E, além dessa representação decimal, a calculadora também produz uma “pintura” do número como mostra a Figura 4.

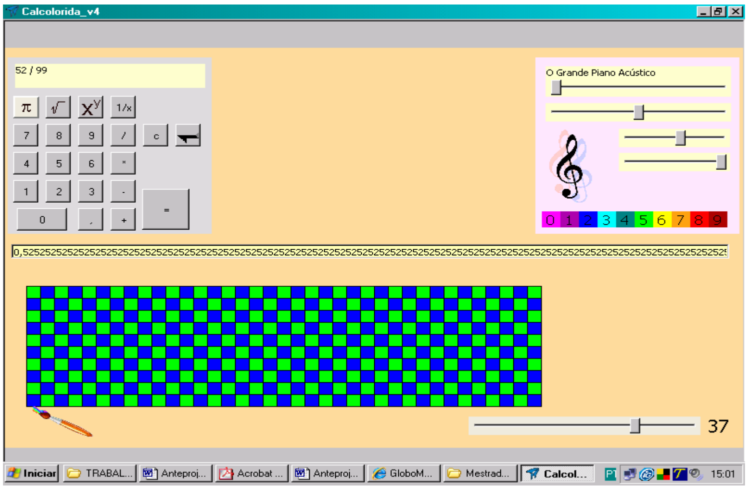

Figura 4. A musi*CAL*colorida representa $52/99$**.**

É possível explorar diferentes representações do número $\frac{52}{99}$, tendo em vista que a calculadora mostra até 500 casas decimais e assim produz diferentes “pinturas” para a mesma fração como nas Figuras 5 e 6.

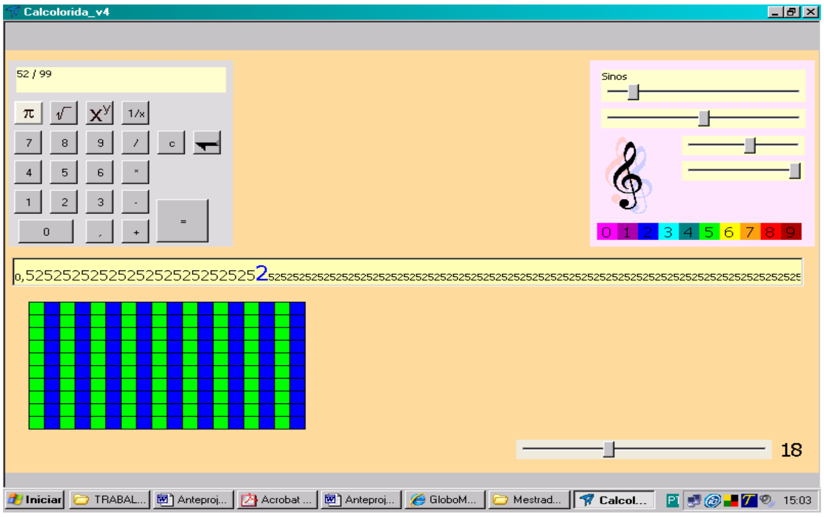

Figura 5: $52/99$ **representada em 18 colunas na musi*CAL*colorida**

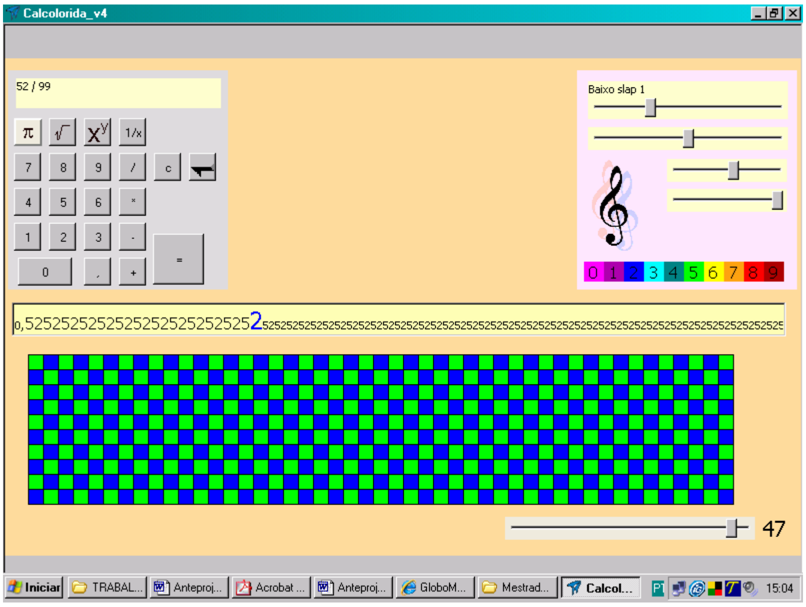

Figura 6: $52/99$ **representada em 47 colunas na musi*CAL*colorida**

Além de “pintar” o número, também é possível “tocar” (até 500 casas decimais), no caso de $\frac{52}{99}$, por exemplo, a música tocada é uma repetição de duas notas alternadas. Sendo este trabalho direcionado a aprendizes cegos ou com baixa visão, esta representação sonora é particularmente importante, permitindo investigar como a percepção dos alunos aos sons que a calculadora emite para os resultados obtidos interfere na atribuição de significados matemáticos para os mesmos. Nossa expectativa é que os alunos que utilizam o micromundo Musi*Cal*colorida consigam perceber a Matemática em questão.

Iniciamos nossa pesquisa (Fase I) utilizando a 4ª versão[6] da calculadora.

As Figuras 4, 5 e 6 mostram como a calculadora foi apresentada. Nesta versão o aluno podia ver (para os com baixa visão) os resultados emitidos pela calculadora tanto no visor – que é comum as calculadoras convencionais – quanto no tabuleiro de cores, também havia a possibilidade de ouvir o som emitido pelo

---

[6] Estamos considerando a 1ª versão criada por Sinclair e as outras três versões como adaptações da 1ª realizadas pelo grupo de pesquisadores liderados por Lulu Healy.

software alterando o instrumento musical e o tempo das notas. Outra possibilidade, não explorada com os alunos de escola regular – videntes, é o fato de a calculadora narrar tudo que o aluno insere, viabilizando para os que não possuem visão seu manuseio sem qualquer problema.

Como sugestão dos alunos da Fase I da pesquisa, e visando melhorar a acessibilidade dos envolvidos foi acrescentado à calculadora outras características, porém sua versão será descrita aqui como sendo a 6ª porque para atender à pesquisa de Rodrigues ela também sofreu alterações:

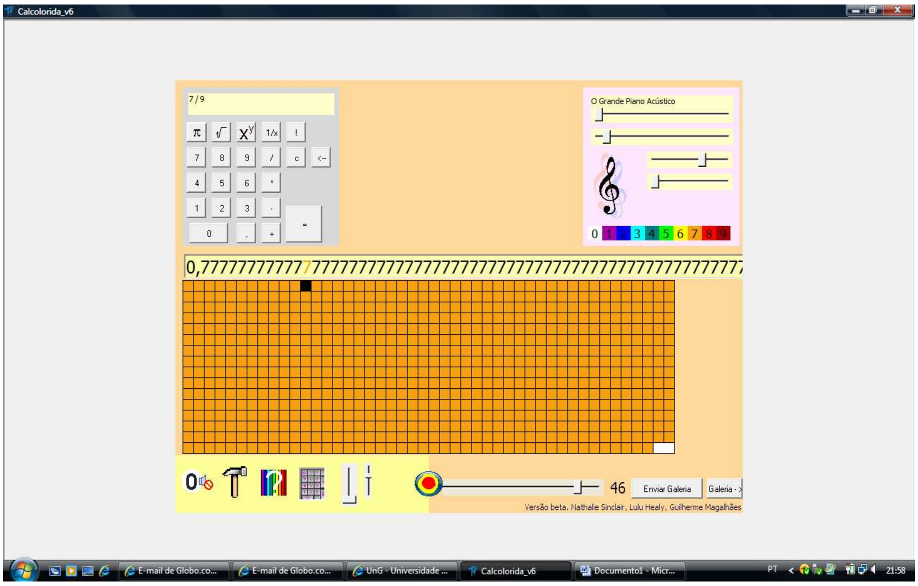

Figura 7: Versão 6 da calculadora

Foram incluídos na calculadora: a possibilidade de colocar ou não som para o número zero, um martelo que impede a utilização dos números, uma galeria para armazenar as divisões realizadas na calculadora (armazena tanto o som como o tabuleiro de cores), uma proposta de desafio – gerar som, gerar cor e gerar som e cor, a possibilidade de aumentar o tamanho dos quadradinhos do tabuleiro de cores (pensado para atender os alunos com baixa visão) e um controle para ajuste da precisão do cálculo de raiz. Destacamos que das ferramentas elencadas, não utilizamos o martelo, a proposta de desafio e o ajuste de precisão de raiz. Das mudanças ocorridas da versão 4 para a versão 6, para nosso trabalho consideramos muito importante o aumento do tamanho dos quadrados que compõem o tabuleiro de cores, a galeria e a inserção de uma voz, que “narra” todas as ações realizadas no micromundo. Nossa versão da calculadora também sofreu adaptações para que suas funções pudessem ser acessadas pelo teclado:

- ✓ Tecla “S” para fazer parar de emitir som;
- ✓ Tecla “C” para apagar os números inseridos;
- ✓ Tecla “M” para tocar a música gerada pela divisão;

Buscamos com o micromundo Musi*Cal*colorida uma nova abordagem para o trabalho com números racionais, trazendo a possibilidade de adquirir conhecimento matemático mais prazerosamente dentro de um universo colorido e sonoro, repleto de uma matemática possível de se entender, “feita” e “pensada” pelos alunos.

2.6 Descrição das sessões

Como decidimos trabalhar em duas fases de coleta de dados, descrevemos a seguir o processo que compôs cada uma delas.

2.6.1 Sessões da Fase I

Esta fase teve como objetivo principal fazer as adaptações necessárias na ferramenta escolhida e por meio das atividades que propomos, delinear uma estratégia para trabalhar o conteúdo matemático escolhido com alunos cegos ou com baixa visão. Como existem poucos trabalhos sobre o ensino de matemática a pessoas cegas, decidimos propor a este público a utilização do computador para trabalhar com Matemática, utilizamos esta fase para conhecer melhor como alunos com as características descritas reagem a estímulos sonoros e como este som contribui para a identificação das características dos números trabalhados.

As sessões de ensino dessa fase foram realizadas de agosto a outubro de 2008, totalizando seis sessões de aproximadamente 50 minutos, sendo sujeitos de pesquisa os seis alunos do Instituto de Cegos Padre Chico. Nossa previsão era de oito encontros, mas devido ao calendário de eventos da Instituição, tivemos que cancelar dois encontros, mudando nossa programação e tornando necessário, para obtenção de dados mais completos, a realização de uma segunda fase. Como fomos os primeiros pesquisadores a obter autorização para realizar pesquisas nesta instituição, fomos alertados da rigidez de seu calendário e que não seria possível estender o prazo para darmos continuidade a pesquisa, optamos então por buscar outra instituição que pudesse nos receber, encontrando a AdeviG.

Realizamos cinco sessões no laboratório de informática do Instituto Padre Chico, no qual utilizamos um computador por dupla e uma sessão na sala de aula dos alunos para encerramento desta fase. Para coleta de dados, as sessões foram gravadas em áudio e vídeo para a análise das expressões dos alunos, incluindo as anotações registradas nas atividades e os documentos em Word que cada dupla criou para responder as atividades.

Na análise buscamos identificar e compreender qual é o papel do som emitido pela ferramenta na construção de significados matemáticos para números racionais, detectando, através das suas falas e dos seus gestos, possíveis narrativas para os fenômenos matemáticos observados.

2.6.1.1 Atividade Inicial e Entrevista com roteiro

Essa entrevista tem como objetivo a realização de uma discussão sobre os números racionais para situar os alunos no assunto e investigar seu conhecimento sobre esses números.

As perguntas foram feitas pela pesquisadora que gravou as respostas em áudio. Os alunos digitaram suas respostas para a atividade inicial em documento Word (havia em cada dupla um responsável por digitar as respostas).

A entrevista teve como roteiro as seguintes perguntas:

- *De qual número (ou números) você particularmente gosta? E de qual (quais) você não gosta? Pode explicar?*

- *Você já deve ter aprendido em algum momento de seus estudos sobre os números racionais. O que você sabe sobre esses números?*

- *Fale alguns números que você sabe serem racionais.*

Figura 8: Roteiro da Entrevista

Para verificarmos qual é o conceito desses alunos sobre números racionais apresentamos a atividade inicial. Nosso objetivo foi comparar as respostas dadas pelos alunos na entrevista (Fig. 8) com suas ações ao se confrontarem com uma atividade que pedia para apontarem quais números são racionais dentre os números expressos na atividade.

Atividade Inicial

O professor de Michele está dando uma aula sobre números racionais faz a seguinte pergunta:

Que números são racionais? Michele pensou em vários números.

$\sqrt{126}$ $\frac{16562}{13}$ $\frac{7}{10}$ $\frac{8}{99}$ $0,\overline{635}$ $\frac{84}{13}$ 15 0 $\sqrt{36}$ 0.1010010001...

$\sqrt{289}$ $5,\overline{5}$ 0,16 $\sqrt{2}$ -0.325 $\frac{8}{2}$ 13,76543217654321... $\frac{25}{4}$ $0,\overline{3}$

-36 $\frac{6}{11}$ $\frac{3}{9}$ $0.32\overline{51}$ 0,12123123412345.. 12,66

Todos os números que Michele pensou são números racionais? Justifique sua resposta.

Figura 9: Atividade Inicial

Apresentaremos os resultados das atividades propostas no capítulo 3.

2.6.1.2 Apresentação do software aos participantes

Nesse 2ª encontro apresentamos a calculadora, buscando por meio da interação dos participantes com a ferramenta suas sugestões para adaptação da mesma. Observamos também nesse encontro suas reações aos estímulos sonoros dados pela calculadora a fim de conseguirmos delinear a escolha das atividades que iríamos propor sobre números racionais. Para alcançar nosso objetivo propusemos a realização de uma sequência de divisões utilizando a calculadora. Assim, deixamos os participantes interagirem com as diferentes ferramentas da calculadora, como o tamanho da tabela - para os que possuíam baixa visão, instrumentos, tempo das notas, tom, diferença de tempo entre as notas, música e outras, para que nessa exploração eles experimentassem as diferentes ferramentas desse ambiente computacional e para que as duplas explorassem a expansão decimal de cada número da sequência, contemplando tanto a representação dos racionais inteiros, das dízimas exatas e periódicas.

Assim conseguimos obter diferentes expressões resultantes das reações das duplas, perante a representação dada pela calculadora para cada número racional.

_Vamos realizar a seguinte seqüência $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{11}$.

Figura 10: Atividade 1 Familiarização e Exploração

2.6.1.3 Organizando

Em uma caixa colocamos números racionais na representação fracionária, ***em Braille*****,** com o objetivo de serem organizados em grupos a partir de critérios escolhidos pelos alunos após interação com a calculadora. A escolha dos números para essa atividade visava contemplar vários tipos de números racionais partindo da representação fracionária para a decimal, como mostra a tabela com os números racionais.

Números inteiros	**Decimais exatos**	**Decimais periódicos simples**	**Decimais periódicos compostos**
$\frac{16562}{13}$ $\frac{42768}{324}$	$\frac{5}{2}$ $\frac{315}{1000}$ $\frac{25}{4}$	$\frac{5}{3}$ $\frac{6}{11}$ $\frac{8}{99}$ $\frac{9}{999}$ $\frac{5689}{9999}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{5}{13}$	$\frac{148}{9990}$ $\frac{1}{22}$ $\frac{656}{495}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{425}{30}$ $\frac{89}{65}$ $\frac{789}{62}$

Tabela 1: Números escolhidos.

Para auxiliar na organização, os alunos contaram com um documento em Word contendo uma tabela com os seguintes critérios:

Números	Observações (Aspectos/Características do Grupo)	Nome do Grupo

Tabela 2: Descrições dos resultados.

<u>Atividade 2:</u> Retire da caixa um número e use a calculadora para produzir representações do número sorteado.

a) Observando as representações (numérica, visual e sonora) desses números sorteados, anote os aspectos que você considera importante, interessante, pertinente, diferente, atrativo, engraçado...

A partir dessa observação, comece organizar esses números em grupos, os quais devem ser nomeados explicando seu critério de seleção.

b) Crie um número a mais que se encaixe em cada um dos grupos obedecendo ao critério de organização.

Figura 11: Atividade 2 - "organizando"

Utilizamos para a realização dessa atividade três sessões.

2.6.1.4 Conexões entre a matemática dos alunos e a matemática convencional

Neste encontro fizemos uma reflexão sobre a atividade 2 e suas respostas para a atividade 1. Os alunos puderam avaliar suas concepções e suas ações sobre números racionais, destacando o papel da ferramenta utilizada e a sua importância para a realização da atividade 2. Nosso objetivo nessa sessão foi o de mostrar aos alunos como contribuíram no desenvolvimento do micromundo e também apontar a matemática envolvida na atividade, que de certa forma ficou implícita durante o experimento.

2.6.2 Sessões da Fase II

Como identificamos que os alunos da Fase I tiveram algumas dificuldades para realizar a atividade proposta e também porque não havíamos proposto a eles uma atividade que contemplasse o conceito de fração equivalente e já tínhamos utilizado todas as sessões que pedimos para a direção – decidimos não solicitar mais encontros porque a direção da escola já havia exposto que não poderíamos realizar sessões nos meses de novembro e dezembro porque consideram a participação de pessoas alheias a instituição nessa época prejudicial aos alunos que nesse período realizam as provas finais e a recuperação - decidimos aplicar o experimento em outra instituição. Nossa procura nos levou a AdeviG, onde não conseguimos alunos com a mesma idade dos alunos do Padre Chico. Entretanto dois voluntários, Carlos e Gilmar, se apresentaram e um deles, Carlos, antes de ficar cego, lecionava a disciplina Matemática em escolas estaduais de São Paulo, nos níveis fundamental II e médio. Consideramos isso uma oportunidade para investigar as reações e suas sugestões para adaptação de nossas atividades. Assim, pensamos que neste novo cenário poderíamos analisar uma situação na qual um professor de matemática cego, explorou esta ferramenta junto com um colega que não teria tanta experiência com matemática. Além disso, decidimos incluir uma nova atividade na sequência contemplando o conceito de fração equivalente.

Realizamos 3 encontros, sendo dois com 90 minutos de duração e um com aproximadamente 150 minutos. As sessões foram gravadas em áudio e vídeo, o documento em Word utilizado para responder as questões também foi salvo.

2.6.2.1 Entrevista com roteiro

Realizamos uma entrevista com os participantes com o mesmo roteiro da entrevista realizada com os participantes do Padre Chico e com os mesmos objetivos: a realização de uma discussão sobre os números racionais para situar os alunos no assunto e investigar seu conhecimento sobre esses números. Como os sujeitos envolvidos nessa fase já haviam passado pela educação básica e um deles era professor de Matemática, decidimos não aplicar a atividade inicial, subentendendo ser essa etapa desnecessária.

De qual número (ou números) você particularmente gosta? E de qual (quais) você não gosta? Pode explicar?

Você já deve ter aprendido em algum momento de seus estudos sobre os números racionais. O que você sabe sobre esses números?

Figura 12 – Entrevista

2.6.2.2 Apresentação do software

Neste encontro apresentamos a calculadora aos sujeitos e suas características.

Como 2ª atividade, seguimos o roteiro:

1. Pedir para realizarem uma divisão (*com números escolhidos por eles*), perguntar se sabem qual resultado dará. Pedir para realizarem a mesma divisão na calculadora. (*observar a reação deles ao som emitido*)

2. Pedir outras divisões que pensam emitir o mesmo som da escolhida por eles anteriormente. (*observar a estratégia utilizada para a obtenção das frações equivalentes)*

3. Pedir para falarem 3 números que saibam ser racionais.

Figura 13: Roteiro da entrevista de introdução

Essa atividade teve como objetivo investigar a estratégia utilizada por nossos sujeitos para resolver o item 2. Observaremos se nossos sujeitos utilizariam o conceito de frações equivalentes. Esta etapa também contribuirá para futuras adaptações no software e sugestões de novas atividades.

Pensamos em realizar com estes sujeitos a mesma atividade proposta por Souza (dissertação em andamento) para alunos surdos que trata o conceito de frações equivalentes, conseguindo então resultados que pudessem ser comparados.

2.6.2.3 Descobrindo a propriedade da equivalência de frações

Nesse encontro propusemos uma atividade sobre frações equivalentes e em seguida a atividade 2 da fase I. Nossa hipótese era que ao trabalharem na primeira atividade o conceito de frações equivalentes, seria mais fácil conseguirem realizar o item b da atividade “organizando”.

Para a realização da atividade de frações equivalentes, propusemos um quadro com as seguintes divisões:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$$

$$\frac{1}{7}, \frac{2}{14}$$

$$\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}$$

$$\frac{2}{2}, \frac{5}{5}, \frac{73}{73}$$

Figura 14: Quadro de frações equivalentes

As divisões foram ditadas de maneira aleatória pela pesquisadora, afim de que percebessem, utilizando a música gerada por cada divisão, a regularidade dos sons para fazer questionamentos que os permitissem perceber a matemática envolvida.

Pedimos para que realizassem a seguinte tarefa:

1) Com a calculadora separar as frações em grupos de acordo com a música gerada.

2) Para cada grupo que você separou encontre mais duas frações que gerem a mesma música.

Figura 15: Tarefa da atividade de frações equivalentes

Fizemos neste encontro uma reflexão sobre todo o trabalho realizado nas três sessões. Os sujeitos envolvidos nessa fase, apesar de já terem passado pela educação básica, não lembravam o conceito de equivalência de frações, mas, após o trabalho com a calculadora declararam serem capazes de lidar com o tema com facilidade. Ressaltaram também a importância do uso da ferramenta e de sua acessibilidade aos deficientes visuais.

Após a realização da atividade de frações equivalentes, propusemos a atividade “organizando” (Figura 11) a fim de compararmos nossos dados com os dados da Fase I da pesquisa.

2.7 Análise dos dados

A análise dos dados coletados através da gravação de todas as sessões de ensino e anotações em fichas foi norteada pela metodologia de Design Experiment e pelo embasamento teórico de nossa pesquisa.

Levando em consideração o caráter cíclico da metodologia escolhida fizemos, a cada sessão, uma reflexão sobre todos os elementos de nossa ecologia. Assim, pretendemos identificar:

- A coordenação dos elementos da ecologia na objetificação de números racionais;
- Estratégias utilizadas pelos sujeitos ao longo das sessões (identificando elementos de suas culturas);
- Indícios, nas suas relações com a calculadora e o conteúdo matemático, de sintonicidade corporal e sintonicidade com o ego;
- O papel do pensamento narrativo no processo de objetificação e as propriedades dos números racionais destacadas nas estórias contadas durante a realização das atividades.

Nesse capítulo descrevemos nossa metodologia de pesquisa, o Design Experiment, destacando suas características e seus elementos. Descrevemos também o desenvolvimento da ferramenta utilizada e as atividades desenvolvidas com a utilização da mesma nas sessões de ensino.

No próximo capítulo analisaremos as atividades realizadas pelas duplas que participaram da Fase I e pela dupla que participou da fase II, tentando identificar, entre outras coisas, indícios de pensamento narrativo e as estratégias adotadas para resolução das atividades.

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DE DADOS

Nesse capítulo descrevemos em detalhes cada uma das sessões de pesquisa com suas implicações, reflexões e interações.

3.1 Sessões da Fase I

As sessões de ensino foram realizadas em seis encontros. Nos cinco primeiros, foram apresentados o software e as atividades que envolviam números racionais e suas diferentes representações. Os estudantes deveriam descrever as características observadas em cada divisão para em seguida agruparem os números de acordo com os comportamentos observados, em um número de grupos definido pelos próprios estudantes, que deveriam explicar as escolhas dos agrupamentos.

Nas sessões de ensino participaram seis estudantes, a pesquisadora e a professora de matemática dos estudantes. A orientadora da pesquisa estava presente em algumas sessões. O material utilizado para o desenvolvimento de cada sessão foi o computador, que serviu para o trabalho com o software e para que os alunos tivessem acesso às atividades, respondendo-as em documento Word com a ajuda do software Virtual Vision. A captação das atividades desenvolvidas foi feita por gravação em áudio e vídeo, pela atividade realizada por cada dupla em Word e por anotações feitas pela pesquisadora. Em seguida descrevemos em detalhes as sessões de ensino de cada dupla.

Antes de iniciarmos a descrição das sessões, destacaremos algumas informações dadas pela professora de Matemática dos sujeitos.

- O conteúdo Números Racionais havia sido trabalhado no ano anterior (2007) e ela considera que os alunos tiveram dificuldades para compreendê-lo, principalmente suas diferentes representações e conversão de uma representação para outra;
- No ano atual (2008), os alunos estavam trabalhando com Números Irracionais.

3.1.1 Primeira sessão

Nesta sessão, propusemos aos alunos uma entrevista (Figura 8) e a realização da atividade inicial (Figura 9). Então dividimos nossa análise em dois momentos: o primeiro para a entrevista e o segundo para a atividade inicial. Não trabalhamos nessa sessão com a calculadora. As perguntas foram feitas com a intenção de deixar os sujeitos à vontade com nossa presença, e com o fato de estarmos gravando as sessões, demonstrar nosso interesse em suas opiniões e a importância de sua participação, deixando claro, porém, que suas respostas não seriam julgadas como certas ou erradas.

3.1.1.1 Entrevista

A seguir a tabela com as respostas dadas por nossos sujeitos:

Sujeito	Número que mais gosta	Número que não gosta	O que é número racional
Cauan	Gosto do 13 porque é minha idade.	Agora número que eu não goste é difícil, tudo é número!	Já aprendi, vou falar o que eu acho que é porque eu esqueci. Números racionais são aqueles números que dá para fazer a raiz quadrada dele. Exemplos: 36 e 49.
Gabriel	Gosto do número 14, porque é minha idade.	Não tem nenhum número que eu não goste.	Acho que são os positivos e negativos. Por exemplo -2 e 2.
Josiel	Gosto do 7 porque é meu número da sorte.	Não gosto do 11 porque me lembro do atentado de 11 setembro nos Estados Unidos.	Sim, vou falar o que eu acho tá! Acho que é o que consigo tirar a raiz quadrada. Exemplo: 25,81 e 49.
Kelly	Gosto do 6, porque é meu número preferido.	Não gosto do 44, porque este número não me dá muita sorte.	Não tenho certeza, mas acho que – 25 é um número racional.
Lennon	Gosto do 3, porque é meu número da sorte.	Não gosto do 13 não dá sorte.	Já aprendi sim, são os números 1,2,3 etc.
Victor	Gosto do número 7, porque é um número alto.	Não gosto dos números menores que sete.	Nem todos os números que estiverem dentro da raiz serão racionais, pode ser irracional também. Exemplo: 1,3,4 e 7.

Tabela 3 - Respostas da entrevista com roteiro.

Em geral, as respostas de nossos sujeitos referentes ao número de que mais gostavam e ao número que não gostavam estava relacionado à emoção que os números causam neles (sentimento positivo – sorte, sentimento negativo – azar) ou coisas que foram marcantes em suas vidas. Vale destacar que todos deram como respostas números inteiros.

Já nas respostas dadas à questão referente ao conhecimento deles sobre números racionais, Lennon deu como exemplo números inteiros. Ao dizer “zero, um, dois, três etc”, dá a idéia de que a sequência cresce infinitamente. Gabriel deu como exemplo um número inteiro negativo e um positivo (que coincidentemente, ou não, eram simétricos). Três de nossos sujeitos (Cauan, Josiel e Kelly) deram como exemplo números inteiros quadrados perfeitos.

3.1.1.2 Atividade inicial

Neste segundo momento da sessão, propusemos a atividade inicial (Fig.9). Obtivemos as seguintes respostas das duplas:

Cauan e Josiel	Kelly e Victor	Gabriel e Lennon
Se der para fazer raiz quadrada do número, é racional. Se não der, é irracional.	Não, pois também tem números irracionais. Os números “que dá” para tirar a raiz são números racionais, e os números que “não dá” para fazer a raiz são classificados como irracionais.	Os números que estão na raiz não são racionais.

Tabela 4 - Respostas da atividade inicial.

Nesta tabela fica mais evidente que nossos sujeitos não conseguiram definir o que é número racional. Todas as duplas disseram que existe ligação entre ser possível extrair a raiz de um número e ele ser racional. Isso pode ter ocorrido por influência do fato de que o conteúdo Números Irracionais estava sendo trabalhado naquele momento pela professora de Matemática, ficando gravado por eles, então, que alguns números irracionais são representados como raízes não exatas. Como estávamos todos no mesmo espaço físico, também podemos pensar que as respostas das duplas Kelly e Victor e Gabriel e Lennon possam ter sido influenciadas pela resposta da dupla Josiel e Cauan que foram os primeiros a responder.

Na atividade proposta escolhemos números representados de diferentes formas: radicais, em forma de divisão (fração), dízimas periódicas e números decimais exatos. Confrontando as respostas dadas na entrevista e na atividade, percebemos que os alunos não reconhecem as diferentes representações de um número racional e fazem uma ligação entre conseguir extrair a raiz de um número e ele ser racional ou irracional.

3.1.2 Segunda sessão

Explicamos como funcionava a calculadora e como seria a participação de nossos sujeitos nesta atividade. Pedimos para que realizassem a Atividade 1 (Familiarização e Exploração) e descrevessem as características de cada resultado, segundo suas interpretações. Em seguida pedimos para que escolhessem qual resultado gostaram mais e o porquê.

Apresentamos a seguir as observações feitas pelas duplas para esta atividade.

Divisão	***Josiel e Cauan***	***Kelly e Victor***	***Lennon e Gabriel***
$\frac{1}{2}$ = 0,5	O som foi legal, dá para entender bem o que ele quer dizer.	Não gostamos porque é muito sem graça.	É legal.
$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$	O som tá muito repetitivo. Depois de certa vez de repetido deveria parar.	Nossa! Parece alguém tentando gritar.	É legal.
$\frac{1}{4}$ = 0,25	Quando der uma divisão exata, mesmo assim dá para mudar o tempo das notas.	O som é muito curto.	Parece uma campainha.
$\frac{1}{5}$ = 0,2	Ta legal dá para entender.	O som é muito curto.	Só tem uma nota.
$\frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$	O som está bom, pois os números como são repetidos dá para entender melhor.	Este é diferente, tem uma marcação antes de começar a repetir as notas.	É legal, parece uma música.
$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$	O som parece uma música	Ficou ótimo.	Legal, é tem bastante notas diferentes.
$\frac{1}{8}$ = 0,125	Se não fosse a última nota, ficaria "muito louco!", pois ficaria parecendo uma escala.	Curto.	É bom.
$\frac{1}{9} = 0,\overline{1}$	Parece começo de suspense.	Péssimo! A mesma nota sempre.	Poderia ter mais notas para ficar mais legal.
$\frac{1}{10}$ = 0,1	Bom.	Muito curto.	Só tem uma nota.
$\frac{1}{11} = 0,\overline{09}$	Não gostei desse som.	Ficou bom.	Gostamos da paradinha entre as notas.
Resultado Preferido	$\frac{1}{7}$ foi o resultado que mais gostamos. Pois se a pessoa for criativa dá para formar uma música.	O melhor foi 1/11 porque tem som alternado.	Gostamos mais de 1/11 por causa da paradinha.

Tabela 5 - Atividade de Familiarização

Por meio da análise do áudio e do vídeo dessa atividade realizada pelas duplas e das anotações que fizemos, é pertinente descrevermos com detalhes todo o percurso realizado durante a mesma.

3.1.2.1 Dupla: Cauan e Josiel

Josiel foi quem controlou o teclado do computador ao longo da atividade, tanto durante o trabalho com a calculadora quanto nas descrições dos cálculos efetuados no Word. A primeira divisão executada foi $\frac{1}{2}$. Pelas falas da dupla, parece que foi neste momento que eles entenderam a proposta da criação de uma calculadora musical:

> *Josiel: o que você acha?*
>
> *Cauan: Ah tá... Agora entendi o que eles (as pesquisadoras) queriam dizer!... Ela (a calculadora) toca. Legal!*

Na sequência, eles ouviram o resultado da divisão $\frac{1}{3}$. Neste resultado eles se surpreenderam:

> *Cauan: Nossa... Não vai parar?... Isso é muito louco.*
>
> *Josiel: Eu acho que deveria parar... O som fica muito repetitivo, é só "plim,plim,plim"... É chato.*

Embora o comentário de Cauan abrisse a possibilidade de uma discussão sobre a idéia de uma representação infinita, Josiel dispersou o assunto quando disse que deveria parar de repetir a mesma nota. De certa forma, Josiel cortou a possibilidade de pensar sobre representação infinita com ajuda da calculadora, pois tinha no teclado a possibilidade de parar de emitir som, isso ocorria ao teclar "*s*" para "*stop*". De fato, na calculadora, a representação é (necessariamente) finita – teria parado depois 500 casas decimais tocadas. Mas, talvez se nossos sujeitos tivessem deixado a calculadora tocar mais, poderia ter ocorrido um estímulo para a busca de novas reflexões sobre esta questão. Entretanto, neste momento eles estavam mais interessados em compreender o funcionamento da calculadora – o que foi possível ou não – e a natureza da representação acabou sendo deixada de lado. Notamos também que, para este número, a representação sonora também influenciou a ação de Josiel. Talvez o fato de ele achar chato o "plim, plim, plim" da calculadora contribuísse para sua decisão de interromper a representação. Durante a realização das divisões $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$ a dupla continuou explorando as ferramentas do software. Josiel descobriu que era possível mudar o tempo das notas e quando o resultado era um único número ficava fácil para ser identificado.

Posterior à discussão, Josiel digitou a divisão $\frac{1}{6}$, o que levou a dupla a outra observação importante.

> *Josiel: Agora $\frac{1}{6}$.*
>
> *Cauan: Nossa! Deixa tocar mais rápido. Não parece que tem nota que não repete.*
>
> *Cauan: Tibebebebebebe... Acho que tem um que não repete.*
>
> *Josiel: Será? Para e toca outra vez.*
>
> *Josiel: Parece mesmo... Como o segundo (número) repete fica fácil entender.*

Neste momento, a dupla ouviu pela primeira vez uma representação de uma dízima periódica composta e a atenção dos meninos foi na identificação da primeira nota (algarismo) que não se repetia. Para descrever para Josiel o som criado pelo software, Cauan batia com seu dedo na mesa para acompanhar a representação sonora e cantava *Tibebebebebebe.* Essa atitude evidencia certa sintonicidade com o corpo (Papert, 1985), uma importante característica no trabalho com micromundo.

Durante a divisão $\frac{1}{7}$, Cauan descreve o resultado como uma música.

Cauan: Legal... Parece uma música!
Josiel: É mesmo... Tem notas diferentes.

Podemos observar nas divisões $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{11}$ que o som emitido pela calculadora levava à discussões que faziam referência ao cotidiano da dupla. A música é algo presente e importante para ambos e em suas descrições a ideia de pensamento narrativo também está presente. Embora suas falas não contemplem todas as características destacadas por Bruner (1997), podemos observar que os meninos tentaram dar sentido às representações geradas pelas divisões, por meio de associações com objetos familiares a eles.

No trecho transcrito a seguir, nossos sujeitos discutem o resultado da divisão de $\frac{1}{8}$.

Josiel: Parece uma escala!
Cauan: Mas a última nota não combina.

Aqui transcrevemos uma frase dita por Cauan quando realizou a divisão $\frac{1}{9}$, onde fica mais clara a idéia de pensamento narrativo.

Cauan: Esse parece música de filme de suspense.

Para Josiel, a música gerada pelo software, além da representação de um resultado deveria ter sonoridade. As notas tinham que combinar entre si.

Josiel: Esse (som) é chato, as notas não combinam.

Verificamos que as respostas dadas pelos sujeitos nesta atividade trazem consigo um elemento importante de suas vidas: a música. Ambos cursam músico - grafia Braille no instituto. Esta disciplina é considerada fundamental para o desenvolvimento da percepção sonora, essencial na vida daqueles que são cegos ou que possuem baixa visão.

A dupla escolheu como o melhor som o resultado da divisão $\frac{1}{7}$, que tem um período de seis dígitos, sendo inclusive, o resultado mais difícil quando se quer identificar o tamanho do período. É importante destacar que enquanto a música foi bastante privilegiada em suas falas, as interpretações dos sujeitos foram também mediadas pelas propriedades matemáticas. Por meio das representações ouvidas, temos alguns indícios de que o processo de objetificação (Radford, 2006; 2008) se iniciou durante esta atividade. Eles distinguiram, por exemplo, resultados de divisões nos quais apenas um algarismo (nota) se repetia, quando a representação tinha apenas um algarismo, quando se tratava de um número limitado de algarismos etc.

Ao longo da atividade, o som emitido deixou de ser apenas uma característica do software, tornando-se também um signo – onde suas características não estão mais ligadas às de uma música - uma expressão de objetos matemáticos. Como no exemplo da flecha que em cada cultura representa um símbolo diferente, nossa música (do software) não é mais um simples som para nossos sujeitos, nela eles encontram e destacam características antes atribuídas a números[7].

3.1.2.2 Dupla: Kelly e Victor

Victor ficou responsável por digitar os dados no computador, segundo ele por ter mais facilidade que a Kelly. É pertinente ressaltar que ele possui cerca de 95% da visão e que, segundo ele, não se baseou no tabuleiro de cores para realizar as atividades porque queria ter as mesmas condições que a Kelly.

Ao realizar a primeira divisão ($\frac{1}{2}$) nossa dupla não demonstrou nenhum entusiasmo. Talvez pelo fato de ter somente uma casa decimal - emitindo somente

[7] Entende-se aqui por número a representação de um objeto matemático, não representação de quantidade.

uma nota – a divisão não tenha chamado a atenção da dupla, e isso foi destacado na classificação que deram para o resultado.

Ao realizarem a divisão $\frac{1}{3}$ Victor exclamou:

> *Victor: “Nossa! Parece uma pessoa tentando gritar mais o grito não sai completo”. (risos)*
>
> *Kelly: É mesmo, parece que alguma coisa corta e a pessoa continua tentando e vem alguém e corta de novo.*

Nas falas de nossos sujeitos destacamos traços de pensamento narrativo. Ao comparar o som da calculadora com o de uma pessoa tentando gritar, Victor utiliza características destacadas por Bruner (1997): primeiro ele liga o som com uma ação de uma pessoa imaginária, tem certa sequencialidade e com certeza uma qualidade dramática. A descrição feita por Kelly ao acompanhar Victor nesta viagem ao imaginário também traz consigo a temporalidade. Ao pensar que a pessoa tenta gritar, algo a impede, ela tenta de novo, algo a impede, em um ciclo que não tem fim, Kelly destaca uma sequência para o fato, incrementando a emoção da história imaginada por eles e também uma sequência que poderia ser associada com a representação decimal infinita deste número.

Com o decorrer da atividade realizada pela dupla, percebemos que os resultados exatos não chamaram a atenção deles. Durante a divisão $\frac{1}{6}$ algo diferente foi destacado por Kelly:

> *Kelly: Coloca para tocar de novo, tem uma marcação antes de começar a repetir outra nota.*
>
> *Victor: Tem mesmo, faz “Tum, tam tam tam tam...” . Parece aquelas marcações de surdo*[8] *de escolas de samba. Os outros instrumentos se guiam por ele.*

---

[8] Surdo aqui refere-se a um instrumento musical.

O destaque dado a este diálogo refere-se à percepção da dupla ao fato do primeiro algarismo ser “fixo” e o seguinte se repetir (dízima periódica composta). Não foram usados pela dupla termos matemáticos. Nesta classificação usaram uma conexão com algo que era comum em suas vidas: o som de um instrumento musical. Pela análise do vídeo, observarmos que durante este diálogo, para expressar esta marcação, Victor fazia movimentos com seu corpo como se estivesse dançando uma música. Ele dizia “Tum” parado e “tam tam tam” jogando o corpo de um lado para o outro, como se houvesse uma sintonia - também entendido como sintonicidade (Papert, 1985) - entre o som e os movimentos desenhados por ele no ar. A importância dada ao corpo aparece tanto na teoria da objetificação de Radford (2006; 2008) quanto nos trabalhos de Papert (1985). A relação entre o som produzido pelo software, a emoção que ele causou em Victor e os movimentos de seu corpo são descrito por Radford como algo *sensorial*, ou seja, há materialização do conhecimento matemático por meio da ligação entre o som e o corpo.

Ao realizarem a divisão $\frac{1}{11}$ a dupla reagiu ao fato de não ter som para o algarismo zero. Apesar de existir na calculadora um botão com a opção de ter ou não som para o algarismo zero e embora tenhamos realizado uma explanação sobre as possibilidades da calculadora, a dupla não utilizou este recurso, talvez por ter sido esta a primeira atividade das duplas com a calculadora.

Victor: Que estranho! Toca e para, toca e para...
Kelly: Não é estranho, é diferente!
Victor: Vou colocar para tocar bem rápido para ver como é que fica. Parece que tem uma nota só, fica legal.

A dupla explorou bastante as ferramentas da calculadora, exceto no caso do som para o algarismo zero, mudando continuamente os instrumentos musicais e o tempo das notas. Como já destacamos, a música é algo bem presente na vida de nossos sujeitos e em suas descrições também observamos sua influência.

Destacamos em suas falas modos de pensamento narrativo (dramaticidade e temporalidade) e verificamos que, assim como a dupla Josiel e Cauan, esta dupla também começou o processo de objetificação nesta atividade, apresentando em suas falas vestígios de suas culturas (Radford, 2006; 2008).

3.1.2.3 Dupla Gabriel e Lennon

Para realizar as atividades Lennon e Gabriel revezavam na digitação dos dados no computador. Lennon se baseou no tabuleiro de cores e no som emitido pelo software. Para ter acesso à parte visual da calculadora, ele tinha que encostar seu rosto na tela do computador.

Durante a realização das primeiras divisões a dupla se manteve um pouco indiferente a atividade. Não sabemos se por uma falta de entrosamento entre eles ou se por timidez por estarem sendo gravados. Não havia muita discussão entre eles sobre os resultados, sobretudo destacamos a grande timidez de Gabriel. Porém, durante a realização da divisão $\frac{1}{4}$ a dupla descreveu o som como de uma campainha.

> *Lennon: Esse parece o som da campainha da minha casa (risos).*
> *Gabriel: Parece mesmo.*

Essa associação do som emitido pela calculadora com o som de uma campainha – que é um elemento presente na cultura urbana – nos dá indícios de que foi neste momento que a dupla "se soltou". Só a partir dessa divisão a dupla começou a discutir os resultados, não só destacando se eram bons ou ruins, mais trazendo para os resultados classificações mais pessoais, mais despreocupadas se respondiam algo que era esperado pelos pesquisadores ou não.

Nas divisões seguintes foram destacando nos resultados os que emitiam somente uma nota (decimais exatos), os que tinham mais casas decimais e os que pareciam formar música. Para ambos o resultado da divisão de $\frac{1}{11}$ foi a que teve mais destaque.

Lennon: O colorido ficou legal, uma tira branca e a outra colorida, depois mais uma branca e outra colorida.

Gabriel: Para mim também ficou mais fácil perceber que tinha o zero por causa da paradinha entre as notas.

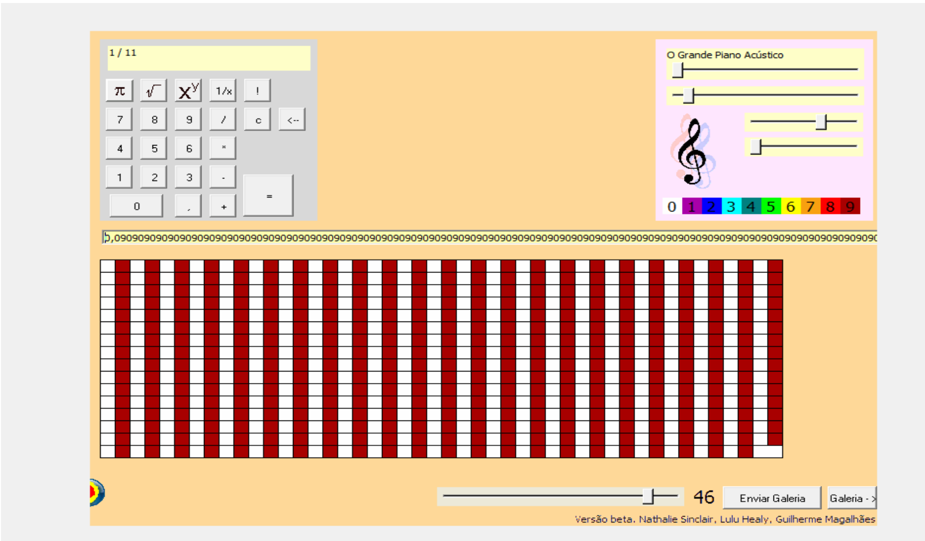

Figura 16 – Tela da calculadora para a divisão $\frac{1}{11}$.

Na classificação dada para este resultado prevaleceu à observação feita por Gabriel, talvez porque naquele momento era ele quem controlava o teclado do computador. Mesmo com Lennon tendo se baseado no tabuleiro de cores, nas classificações feitas pela dupla não destacaram isso. As classificações tinham sempre ligação com o som emitido pela calculadora. A interação entre Gabriel e

Lennon foi algo que inicialmente nos preocupou, pareciam não ter afinidade e como o Lennon conseguia enxergar o tabuleiro de cores da calculadora, pensamos que poderia ser difícil chegarem a um consenso sobre as respostas já que cada um direcionava sua atenção para um ponto diferente. Parece que esta barreira não foi superada no decorrer da atividade. Talvez se tivéssemos colocado Victor e Lennon juntos, ambos poderiam querer usar o tabuleiro de cores e em suas classificações poderiam dar destaque a esta ferramenta da calculadora.

3.1.3 Terceira, quarta e quinta sessões:

Optamos por utilizar três sessões para a realização da Atividade 2 (organizando) porque consideramos não ser suficiente o tempo de cada sessão (50 minutos) para terminá-la.

Nestas sessões, levamos os números em Braille, recortados em tiras e colocados em uma caixa. Vale a pena destacar que nessas tiras as representações eram de divisões e não de frações, e que a digitação deles em Braille foi realizada pela professora Solange. Isso significa que a atividade não envolveu os alunos na tentativa de criar conexões entre representações fracionárias e decimais, diferentemente do trabalho com alunos regulares de Rodrigues (2008). Em termos de objetificação de conhecimento, esta diferença poderia ter consequências importantes – não podemos afirmar que as atividades favoreciam a ligação entre representação fracionária e a operação de divisão. De fato, talvez, o que estava sendo objetificado nas atividades dos alunos foi mais associado às diferentes representações decimais que resultam da divisão entre números inteiros.

Cada dupla recebeu uma caixa contendo os números expressos na tabela 1. A atividade a ser realizada consistia em sortear uma tira, ler a divisão, realizá-la na calculadora e, a partir do som emitido pelo software definir uma característica para esse número e criar grupos definidos pelas características para organizá-los. A atividade teve uma segunda parte onde nossos sujeitos deveriam criar novos números (utilizando divisões na calculadora) para cada grupo criado. Mesmo com três sessões nossos sujeitos não fizeram esta parte. Faremos nossa análise da atividade como um todo[9], destacando, caso haja, particularidades de cada sessão que julgarmos interessantes e pertinentes.

Na tabela a seguir destacamos o agrupamento feito pelas duplas, associando estes grupos com a classificação convencional:

[9] Optamos por colocar os números na sequência que aparece na atividade, mas durante o experimento os números foram sorteados aleatoriamente pelas duplas.

<table>
<tr><th>Característica</th><th>Josiel e Cauan</th><th>Kelly e Victor</th><th>Lennon e Gabriel</th></tr>
<tr><td>Números inteiros:
$\frac{16562}{13}=1274$ $\frac{42768}{324}=132$</td><td>Grupo do silêncio - chato</td><td>Grupo dos sem som</td><td>Resultados sem som e sem cor</td></tr>
<tr><td>Decimais exatos:
$\frac{5}{2}=2,5$ $\frac{315}{1000}=0,315$
$\frac{25}{4}=6,25$</td><td>Grupo dos números que terminam.</td><td rowspan="2">Grupo de som estranho e repetitivo</td><td rowspan="3">Resultados com som e com cor</td></tr>
<tr><td>Decimais periódicos simples:
$\frac{5}{3}=1,\overline{6}$ $\frac{6}{11}=0,\overline{54}$ $\frac{8}{99}=0,\overline{08}$
$\frac{9}{999}=0,\overline{009}$ $\frac{5689}{9999}=0,\overline{5689}$
$\frac{1}{7}=0,\overline{142857}$ $\frac{5}{13}=0,\overline{384615}$</td><td>Grupo dos números com notas repetindo sem parar</td></tr>
<tr><td>Decimais periódicos compostos:
$\frac{148}{9990}=0,0\overline{148}$ $\frac{1}{22}=0,0\overline{45}$
$\frac{656}{495}=1,3\overline{25}$ $\frac{7}{12}=0,58\overline{3}$
$\frac{425}{30}=14,1\overline{6}$ $\frac{89}{65}=1,3\overline{602307}$
$\frac{789}{62}=12,7\overline{258064516129032}$</td><td>Grupo dos números com notas que as primeiras não repetem, depois outras começam a repetir sem parar</td><td>Grupo de som excelente/com ritmo</td></tr>
</table>

Tabela 6 – Agrupamento feito pelas duplas para a atividade "organizando"

Destacaremos a seguir os grupos criados e o percurso realizado por cada dupla para a realização dessa atividade.

3.1.3.1 Dupla: Josiel e Cauan

Antes de começarmos nossa análise, é pertinente destacar que nesta atividade Josiel ficou responsável por digitar os dados no computador e Cauan por sortear os números em Braille.

O grupo denominado pela dupla por "*grupo que termina*" contém os números cujos resultados são decimais exatos. Nesta descrição observamos a idéia de pensamento narrativo. A descrição dos resultados como sendo algo que termina denota que, mesmo que intuitivamente, o software contribuiu – ao emitir ou não som - para a construção do que, para os sujeitos, pudesse ser uma idéia de representação finita e representação infinita.

O "*grupo do silêncio*" contém os números cujos resultados são números com a parte decimal nula. A descrição feita pela dupla traz consigo um aspecto apontado por Healy e Sinclair (2007) que caracteriza uma narrativa (mesmo não tendo uma estória contada) que é a qualidade dramática. Ao qualificar o grupo como sendo "chato", esta classificação tem vestígios de sentimento e emoção. O que é chato para alguém só o é porque tem alguma ligação com seus sentimentos. Nesta classificação verificamos, mais uma vez, como o design de nosso micromundo interferiu no nosso experimento. Ao optarmos por não ter som quando o resultado expresso fosse um número com a parte decimal nula criamos a possibilidade de interferirmos na classificação feita por nossos sujeitos. Talvez se para os resultados com essas características tivéssemos optado por também emitir som, nossos dados poderiam ser diferentes.

O "*grupo com notas repetindo sem parar*" contém os números cujos resultados são dízimas periódicas simples e a expressão "sem parar" mostra como a noção de infinito é percebida por nossos sujeitos. Ao contrário da primeira atividade, parece que agora eles aceitam que alguns números têm uma representação decimal infinita. Mesmo utilizando a tecla "S" para parar de emitir som, a idéia de que o número não termina nunca fica mais explicita nessa classificação.

O “grupo que as primeiras notas não repetem, depois outras começam a repetir sem parar”, contém os números cujos resultados são dízimas periódicas compostas. Nesta classificação destacamos como nossos sujeitos conseguem observar as características dos resultados, descrevendo, por exemplo, a existência de notas que não se repetem e notas que se repetem. Também podemos interpretar esta classificação utilizando as idéias de Radford sobre a objetificação de conhecimento: para os alunos, o som emitido é mais que uma simples música, está incorporado como símbolo do objeto matemático estudado, números racionais, ou talvez por eles, os números decimais produzidos pelas divisões de números inteiros.

Observamos nas classificações feitas pela dupla coerência nos grupos criados e sua forte ligação com as características matemáticas dos números. As classificações seguiram critérios escolhidos por eles, sem preocupação excessiva com a linguagem matemática e sem influência dos pesquisadores ou da professora de Matemática.

3.1.3.2 Dupla Kelly e Victor

Para a realização da atividade de classificação, Kelly ficou responsável por sortear os números em Braille e Victor por digitar as respostas.

O “grupo de som excelente/com ritmo” contém os números cujos resultados foram dízimas periódicas compostas. Não deram destaque ao fato de existirem notas que não se repetiam, destacaram apenas os resultados como “música”. Assim como na dupla Josiel e Cauan, percebemos a dupla Kelly e Victor não tratavam os resultados como números, mas sim como música que é um elemento presente em suas culturas.

O “grupo dos sem som” contém os números cujos resultados têm a parte decimal nula, ou seja, números inteiros. Esta característica foi influenciada pelo design da calculadora, pois nela optamos por não emitir som para a parte inteira do número.

O “grupo de som estanho/repetitivo” contém os números cujos resultados são dízimas periódicas simples e decimais exatos. Neste agrupamento da dupla verificamos a percepção da diferença entre as dízimas periódicas compostas e as dízimas periódicas simples – que foram agrupadas em grupos distintos. É difícil entender porque eles agruparam números cujos sons tocam repetitivamente com números para qual o som parava depois de certo momento.

Destacamos que a dupla Kelly e Victor não usou nomenclaturas matemáticas, mas observamos que conseguiram diferenciar as dízimas periódicas compostas das simples e dos números inteiros. Diferentemente da dupla Josiel e Cauan que separou os resultados em quatro grupos, Kelly e Victor agruparam os resultados em três grupos, não fazendo diferenciação entre dízimas periódicas simples ou decimais exatos. Talvez o design de nosso micromundo possa ter influenciado nossa dupla. Apesar de tocar até 500 casas decimais, a escolha do momento de parar ficava a critério da dupla e, talvez por isso não tenham conseguido perceber diferenças entre decimais exatos e periódicos simples. Para esta dupla, talvez a decisão do design de nossa ferramenta contribuísse para uma percepção por parte deles que poderiam escolher o momento de interromper o som. A separação do grupo das dízimas periódicas compostas pode ter conexão com o fato de ser fácil de perceber a existência de notas que não se repetiam, aspecto favorável para que nossos sujeitos dessem destaque a este grupo.

3.1.3.3 Dupla Gabriel e Lennon

Para a realização da atividade de classificação, Gabriel ficou responsável por sortear os números em Braille e Lennon por digitar as respostas. Segue a classificação criada pela dupla:

Lennon e Gabriel separaram os resultados em dois grupos, os que têm som e cor e os que não tem. Nesta classificação observamos que a dupla separou os grupos entre inteiros e decimais, não dando destaque às diferentes representações dos números racionais (periódicos simples, compostos ou decimais exatos). Pensamos que isso possa ter ocorrido porque Lennon manteve sua atenção voltada para o tabuleiro de cores e Gabriel para o som emitido pela calculadora. Assim como na atividade anterior percebemos que a dupla não tinha um bom entrosamento e isso pode ter influenciado em suas classificações.

Destacamos, porém que Gabriel, ao sortear os números, além de senti-los com os dedos (leitura Braille) também os cheirava, passava pelo rosto e pelos braços, como se esta atitude o fizesse conhecer melhor o que estava no papel, tornando o papel parte ou extensão de seu corpo. Esse movimento também pode ser descrito como objetificação. Isto porque o processo de atribuir ao signo o papel de mediador, denominado objetificação, envolve todo o corpo, ultrapassando a barreira de qualquer sentido – visão, audição, tato, olfato e paladar – envolve o campo perceptivo como um todo. (Radford, 2006; 2008)

3.1.4 Sexta sessão – impressões do micromundo

Nesta sessão, nos reunimos na sala de aula dos alunos para conversarmos sobre as atividades realizadas no laboratório de informática e suas impressões sobre o software e as atividades desenvolvidas. Nosso encontro também contou com a presença da professora Solange.

Todos gostaram do software e consideraram uma ferramenta útil para o trabalho com alunos cegos ou com baixa visão. Foi um consenso entre nossos sujeitos o potencial da ferramenta e a facilidade em lidar com a mesma. Das solicitações feitas destaco a de Cauan que disse que gostaria de ter mais sessões de trabalho com a calculadora e que tivesse uma aula de Matemática explicando os conceitos que a calculadora aborda. Cauan não soube dizer o nome do conceito matemático explorado nas atividades, talvez por isso gostaria de ter, antes de utilizar a calculadora, uma aula de Matemática. Ao ouvir o colega, Josiel concordou com a opinião de Cauan, também acha que deveria ter antes uma aula de Matemática abordando o conceito que seria desenvolvido com a calculadora porque também não lembrava o nome do conceito que foi explorado. Kelly disse não ter certeza do nome do conceito, mas achava que era divisão. Victor respondeu que o nome do conceito trabalhado era dízima. Lennon e Gabriel não souberam o nome do conceito que estava sendo explorado pelo software, mas Gabriel fez questão de dizer que havia aprendido alguma coisa a respeito, mas não lembrava o nome.

A professora Solange também expôs sua opinião:

> *Acho que a calculadora pode ser muito útil para o trabalho com alunos cegos e alunos com baixa visão. O fato de poderem se guiar pelo som, escolher o instrumento musical, o tempo das notas, toda essa liberdade proporciona aos alunos uma aula muito rica. Depois que começamos a trabalhar com a calculadora eles ficaram mais interessados nas minhas aulas. Percebi que a Kelly ficou bem mais a vontade durante as aulas, ela que antes era muito introspectiva agora participa das aulas, sorri, e até brinca. Acho que isso foi um ganho muito grande tanto para a Kelly, quanto para mim*.

Após ouvir a opinião dos alunos e da professora Solange, retomamos a discussão sobre o conceito matemático que foi trabalhado socializando os grupos que foram criados por cada dupla levando-os a uma reflexão do porque da escolha de cada grupo e dos números escolhidos por eles para fazerem parte dos grupos. Após relembrá-los das classificações que fizeram na atividade “organizando”, nossos sujeitos foram levantando algumas hipóteses referentes ao conceito trabalhado.

Josiel: Divisão. A gente sempre pegava um número e dividia pelo outro.

> *Victor: apareciam mais resultados com vírgula. Até porque a calculadora só tocava música para os resultados que tinha algum número depois da vírgula.*

Ao final, nossa discussão nos levou as características dos números racionais (ainda que em suas falas este termo não fosse usado). Os sujeitos perceberam que conseguiam distinguir entre uma dízima periódica simples e uma dízima periódica composta guiando-se apenas pelo som. Destacaram que apesar de ser mais fácil realizar divisões onde os resultados têm a parte decimal nula sem a calculadora, com ela os resultados que mais gostaram eram aqueles que não tinham esta característica. A sonoridade dos resultados foi o que mais chamou a atenção de nossos sujeitos. Deram destaque para os mais bagunçados, interessantes, com ritmo etc, o que Radford explica na teoria da Objetificação como sendo a influência que elementos culturais têm na vida de nossos sujeitos. Neste caso a música é algo que faz parte da vida de todos os envolvidos. Alguns tocam instrumentos musicais, outros cantam no coral da escola e todos fazem musico-grafia Braille.

Nas sessões de ensino percebemos que alunos cegos e os que possuem baixa visão podem fazer conexões entre o som e a cor emitida pela calculadora com objetos matemáticos, sendo capazes de destacar diferentes representações dos números decimais. É pertinente ressaltar que nossa escolha em apresentar numa mesma atividade números cujos resultados apresentassem as diferentes representações de números racionais, teve por objetivo permitir aos participantes perceberem as características desse objeto matemático. Conseguimos identificar que mesmo não utilizando nomenclaturas específicas da Matemática para diferenciar os grupos, alguns de nossos sujeitos conseguiram destacar características muito próximas de seus significados matemáticos e que em suas classificações usaram elementos de seus cotidianos (Radford, 2006; 2008). Também destacamos que o design do nosso micromundo influenciou nas classificações feitas pelas duplas. O fato de termos determinado que não houvesse som para a parte inteira ou do aluno interromper o som quando quisesse, levou nossos sujeitos a classificações que poderiam ser diferentes ou não, se nosso micromundo também fosse diferente. Nessas classificações, conseguimos identificar modos de pensamento narrativo e, durante o trajeto percorrido pelas duplas percebemos vestígios de sentimento de emoção (Grupo do silêncio – Chato) e de dramaticidade e temporalidade (classificações da dupla Kelly e Victor na atividade de familiarização).

A matemática ficou implícita nas classificações de nossos sujeitos - a percepção dos períodos simples e compostos, dos decimais exatos e dos inteiros – pois não usaram nomenclaturas específicas da matemática, mas, deram destaque aos diferentes resultados. Todas as duplas deram destaque os resultados com parte decimal nula, talvez pelo fato da calculadora não emitir som para a parte inteira e esta foi uma escolha dos pesquisadores.

3.2 Sessões da Fase II

Nesta fase contamos com a participação de dois sujeitos: Carlos e Gilmar. Realizamos três encontros na sede da AdeviG para coleta dos dados. A coleta de dados foi realizada em uma sala antiga que não tinha computadores por isso houve a necessidade de levar um computador portátil. Outro fato a ser observado é que este computador não tinha o software Virtual Vision e também não tinha instalado o software da própria calculadora que, assim como o Virtual Vision, "narra" o que é nela realizado, sendo necessário que a pesquisadora narrasse os resultados quando fosse o caso. Também utilizamos com nossos sujeitos o recurso da galeria, ferramenta da calculadora que possibilita armazenar em outra tela as divisões que vão sendo realizadas.

As três sessões foram gravadas em áudio e vídeo e a pesquisadora ficou responsável por digitar os dados no computador. Vale destacar que nossos sujeitos eram adultos e ambos já haviam concluído a educação básica e que Carlos havia sido professor de Matemática da rede estadual de São Paulo antes de perder a visão.

3.2.1 Primeira sessão da dupla Carlos e Gilmar

Nesta sessão realizamos somente a entrevista com roteiro até porque pensamos não ser necessário a atividade inicial já que ambos já haviam concluído a educação básica.

De qual número (ou números) você particularmente gosta? E de qual (quais) você não gosta? Pode explicar?

Você já deve ter aprendido em algum momento de seus estudos sobre os números racionais. O que você sabe sobre esses números?

Figura 17 – Entrevista com roteiro

Obtive as seguintes respostas:

Sujeito	***Número que gosta***	***Número que não gosta***	***Números racionais***
Gilmar	7	9	Não lembro.
Carlos	7	Não tem.	São os decimais.

Tabela 7 – Respostas da entrevista de Carlos e Gilmar.

Com relação aos números que mais gostavam ou que não gostavam nossos sujeitos não fizeram relação com a Matemática. Ambos relacionaram suas respostas a sorte ou azar. Apesar de Carlos ter sido professor de Matemática, sua resposta referente a números racionais foi um pouco vaga, talvez por não lembrar ou por ainda sentir-se inseguro com minha presença, com a presença Gilmar ou simplesmente por medo de estar sendo julgado por dar respostas certas ou erradas.

3.2.2 Segunda sessão da dupla Carlos e Gilmar

Nesta sessão, realizamos a 2ª atividade que tinha o seguinte roteiro:

1. Pedir para realizarem uma divisão (*com números escolhidos por eles*), perguntar se sabem qual resultado dará. Pedir para realizarem a mesma divisão na calculadora. (*observar a reação deles ao som emitido*)

2. Pedir outras divisões que pensam emitir o mesmo som da escolhida por eles anteriormente. (*observar a estratégia utilizada para a obtenção das frações equivalentes).*

3. Pedir para falarem 3 números que saibam ser racionais.

Figura 18 – Atividade 1 da fase II

Essa atividade teve como objetivo investigar a estratégia utilizada por nossos sujeitos para resolver o item 2. Observamos a utilização ou não do conceito de frações equivalentes para responder essa tarefa.

O primeiro a responder a atividade foi Gilmar. Disse que gostaria que fosse realizada a divisão $\frac{7}{13}$. Para explorarmos as ferramentas do software, mudados várias vezes o instrumento musical e o tempo das notas. Ficou claro para nossos sujeitos que cada algarismo corresponde a uma nota musical e que mesmo mudando o instrumento musical, a nota continuava a mesma.

> *Gilmar: Mesmo mudando o instrumento a nota continua a mesma, o que mudo é o som do instrumento. Por exemplo, 4 tem uma nota determinada, sei lá, dó, se eu mudar o instrumento vai continuar sendo dó mas com outro instrumento.*

Talvez neste momento o processo de objetificação tenha se iniciado para Gilmar.

Após a exploração do software, foi solicitada a dupla outra divisão que produzisse o mesmo som que a divisão de $\frac{7}{13}$= 0, 538461538461... (item 2 da atividade 2).

> *Carlos: Mas o resultado influencia nas notas?*
>
> *Gilmar: Influencia. São números diferentes.*
>
> *Carlos: Mas não dá. Eu consigo números próximos, iguais e na mesma ordem não.*

A proposta dessa atividade era observar as estratégias de nossos sujeitos para gerar frações equivalentes, imaginamos que não teriam dificuldades em realizá-la porque Carlos era professor de matemática e poderia conduzir o experimento. Nas falas de nossos sujeitos observamos que ambos não fizeram conexão com frações equivalentes, tentavam, com cálculos mentais, resultados aproximados ao da divisão $\frac{7}{13}$. A seguir apresentamos uma tabela com as tentativas de Carlos e Gilmar.

1º	2º	3º	4º	5º
$\frac{6}{9}$	$\frac{25}{62}$	$\frac{8}{76}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{8}{9}$

Tabela 8 – Tentativas de gerar frações equivalentes.

Não percebemos nenhuma estratégia matemática na escolha dessas divisões, falavam aleatoriamente e no 4º e 5º números tentaram a mudança de posição entre o numerador e denominador. Esperávamos que Carlos fosse assumir o papel de professor durante a experimentação, o que não aconteceu nesta etapa da atividade. Não havia sequência lógica em suas escolhas e é difícil entender qual a linha de pensamento da dupla. Não observamos processo de objetificação em Carlos, sua postura apontou que até aquele momento ainda não havia entendido a proposta da calculadora musical, onde cada nota musical representava um único algarismo.

Nas tentativas de gerar uma fração equivalente a $\frac{7}{13}$, Gilmar destacou dois resultados que chamaram sua atenção:

> *Gilmar:* $\frac{6}{9}$ *e* $\frac{8}{9}$ *deu o número de cima (numerador) repetindo infinitamente.*
> *Carlos: É uma dízima periódica.*

Destacamos que nossos sujeitos realizavam mentalmente as divisões antes delas serem realizadas na calculadora. Apesar de terem destacado esses resultados ambos não questionaram qual propriedade matemática estava sendo explorada nesses dois resultados. Na observação de Gilmar, Carlos parece ter começado a perceber o papel que tinha nessa pesquisa – o de professor de matemática - e talvez a partir desse momento passasse a ter mais sentindo para ele uma representação musical para os resultados e a partir daí o processo de objetificação tenha se iniciado também para Carlos.

Embora o foco da dupla não fosse guiado pela matemática envolvida, mas por curiosidade, foi despertado certo interesse em descobrir porque acontecia esse padrão nas divisões por 9. Isso dispersou a dupla da busca em gerar uma fração equivalente para $\frac{7}{13}$ conduzindo-os a uma nova busca.

Na tentativa de descobrir o padrão da divisão por 9, a dupla tentou as seguintes divisões:

1º	2º	3º	4º
$\frac{8}{19}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{7}{99}$	$\frac{12}{99999}$

Tabela 9 - Padrões da divisão por 9.

Nossos sujeitos tentaram primeiro uma divisão onde o denominador era 19. Pensamos que tentavam concluir que qualquer denominador que contivesse o algarismo 9 também geraria o número que estava no numerador. Após descartarem esta possibilidade, começaram a tentar as combinações de números que só continham o algarismo 9. Apesar de não ser este o objetivo da sessão, nossos sujeitos chegaram empiricamente no padrão dos resultados da divisão por 9. Testamos outras divisões e nossos sujeitos perceberam que isso ocorria com os denominadores 99, 999, 9999 etc.

A dupla desistiu de achar uma fração equivalente para $\frac{7}{13}$, Carlos disse que era complicado fazer os cálculos mentalmente porque esta divisão produzia um resultado com muitas casas decimais (era um dízima periódica simples de período igual a 6). Carlos perguntou se seria possível partir de outra divisão, por exemplo, $\frac{6}{9}$. Gilmar concordou com Carlos e ambos começaram a sugerir divisões.

1º	2º	3º	4º	5º	6º
$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$

Tabela 10 - Tentativas de gerar frações equivalentes

Ao perceber que o som de $\frac{2}{3}$ era igual ao som de $\frac{6}{9}$ (estavam utilizando o recurso da galeria para ouvir os resultados), Gilmar indagou que poderia então existir mais de uma divisão que produza o mesmo som.

Nossos sujeitos não estavam utilizando nenhuma técnica matemática, respondiam as perguntas sempre por tentativa e erro. Observamos também que Carlos ficava mais inseguro em responder as perguntas. Talvez o fato de ter sido professor de Matemática estivesse gerando certa responsabilidade em sempre acertar. Observamos que Carlos se esquivava das perguntas deixando Gilmar conduzir as respostas. Esperávamos que fosse acontecer o inverso, que ele assumisse o papel de professor durante as atividades.

Após algumas tentativas de descobrir qual era a técnica que deveria ser aplicada para se obter divisões que produziam o mesmo resultado (frações equivalentes), Gilmar destacou as seguintes características:

> "*Se eu pensar separadamente tenho que 9 e múltiplo de 3 e 6 é múltiplo de 2. Será que tem alguma coisa a ver? Ainda está embaralhado na minha cabeça".*

Nesta frase de Gilmar, percebemos que começava a ficar mais claro para ele a relação matemática que existia entre as divisões, porém ele não conseguiu concluir sua ideia. Carlos não opinou, apenas ouviu o companheiro e permaneceu calado.

Encerramos esta sessão com a seguinte pergunta: Você pode dar um exemplo de três números racionais?

Carlos	Gilmar
5,2	4,3
3,1	7,2
4,9	9,14

Tabela 11 – Números racionais

Ambos deram como exemplo números decimais confirmando o que Carlos havia respondido na primeira entrevista. Talvez o fato dele, Carlos, ter falado primeiro possa ter influenciado na resposta de Gilmar.

3.2.3 Terceira sessão da dupla Carlos e Gilmar

Esta foi a nossa ultima sessão. Nela aplicamos a atividade de frações equivalentes retomando nossa discussão sobre divisões que produziam o mesmo resultado (som). Os números escolhidos foram levados em uma caixa e nossos sujeitos sorteavam de maneira aleatória e entregavam à pesquisadora que, por sua vez, inseria os dados no computador. Destacamos que, diferentemente da primeira fase, não usávamos o termo “divisão”, utilizávamos o termo fração. Pensamos que como os sujeitos da fase II já haviam passado pela educação básica (também considerando o fato de Carlos ser professor de Matemática) não teriam dificuldades em utilizar essa nomenclatura. Essa escolha pode ter sido determinística para nossos sujeitos no processo de objetificação.

O objetivo desta atividade era que nossos sujeitos percebessem, utilizando a música gerada por cada divisão, a regularidade dos sons para fazer questionamentos que os permitissem perceber a matemática envolvida.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$$

$$\frac{1}{7}, \frac{2}{14}$$

$$\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}$$

$$\frac{2}{2}, \frac{5}{5}, \frac{73}{73}$$

Figura 19 – Frações equivalentes.

Em seguida deveriam realizar a seguinte tarefa:

1) Com a calculadora separar as frações em grupos de acordo com a música gerada.

2) Para cada grupo que você separou encontre mais duas frações que gerem a mesma música.

3) Como fazer para encontrar novas frações com a mesma música de uma fração já dada?

Figura 20 – Atividade de frações equivalentes.

A dupla separou os números em grupos e para resolver o item 3 da atividade. Carlos era o primeiro a incluir novas divisões em cada grupo e em seguida Gilmar cumpria a mesma etapa.

Agrupamento	Números de Carlos	Números de Gilmar
$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$	$\frac{7}{14}$	$\frac{8}{16}$
$\frac{2}{2}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{73}{73}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{10}{10}$
$\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{12}{16}$
$\frac{1}{7}$, $\frac{2}{14}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{8}{56}$

Tabela 12 – Agrupamento das frações equivalentes.

Vale lembrar que os resultados eram enviados para a galeria e que nossos sujeitos solicitavam, quando achavam pertinente ouvir novamente os resultados que lá estavam, a utilização deste recurso. Durante a atividade Gilmar fez uma observação:

> Gilmar: *Tanto* $\frac{3}{6}$ *como* $\frac{4}{8}$ *dá como resultado 0,5 (ele estava realizando os cálculos mentalmente), mas tem outras divisões que dão 0,5. Se eu dividir 25 por 50 também dá esse resultado. Nossa! Desde o começo isso era possível e eu não me lembrava*.

Após sorrir meio sem graça, Carlos lembrou o companheiro:

> *“São frações equivalentes”.*

Após a constatação de que estavam trabalhando com frações equivalentes, a dupla conseguiu concluir a atividade sem dificuldades aplicando o conceito de frações equivalentes, o que nas atividades anteriores não estava muito claro para eles.

Na segunda etapa da tarefa, a dupla tinha que criar mais dois números que se encaixasse em cada grupo criado (o primeiro número foi criado por Carlos e o segundo por Gilmar), a fim de observarmos a estratégia de cada um.

Carlos - exceto para os dois primeiros grupos – criava divisões a partir das divisões já existentes em cada grupo, por exemplo, $\frac{15}{20}$ surgiu da fração $\frac{3}{4}$. Gilmar utilizou para um dos grupos uma fração equivalente a uma que já existia no grupo e para outra usou como base a fração criada por Carlos.

> *Gilmar: Se você colocou* $\frac{4}{28}$ *eu posso multiplicar por 2 e gerar* $\frac{8}{56}$*.*

Essa atividade foi necessária para tratarmos o assunto de frações equivalentes antes da atividade “organizando” que conta com um item onde este conceito é explorado e que na Fase I os sujeitos envolvidos não conseguiram responder.

Partimos então para a atividade “organizando” (tabela 1). Diferente da Fase I da pesquisa, nesta fase os números não foram escritos em Braille, nossos sujeitos sorteavam o número que estava em uma caixa, a pesquisadora os lia e digitava os dados no computador. Segue o agrupamento feito pela dupla:

Inteiros quebrados	Período retardado	Infinitos quebrados	Grupo dos exatos	Inteiros
$\frac{89}{65}$ $\frac{656}{495}$ $\frac{789}{62}$ $\frac{425}{30}$ $\frac{5}{3}$	$\frac{148}{9990}$ $\frac{1}{22}$ $\frac{7}{12}$	$\frac{1}{7}$ $\frac{5689}{9999}$ $\frac{6}{11}$ $\frac{8}{99}$ $\frac{5}{13}$ $\frac{9}{999}$	$\frac{315}{1000}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{25}{4}$	$\frac{42768}{324}$ $\frac{16562}{13}$

Tabela 13 – Agrupamento feito pela dupla Carlos e Gilmar.

O grupo “inteiros quebrados” contém divisões que resultam em números decimais exatos maiores que 1. Destacamos o uso da palavra “quebrado” que neste grupo representa a parte decimal do número. Aqui, nossos sujeitos misturam na nomenclatura uma idéia matemática (números inteiros) com uma característica criada por eles.

O grupo “período retardado” contém divisões que resultam em dízimas periódicas compostas. Nesta classificação observamos indícios de pensamento narrativo, mesmo não sendo uma história, a palavra retardado dá a idéia de existe algo dificultando o período de existir ou começar. E isso foi destacado num diálogo da dupla:

Gilmar: “Não parece que tem alguma coisa impedindo de começar as repetições”?

Carlos: “É mesmo”!

O grupo “infinitos quebrados” contém divisões cujos resultados produzam dízimas periódicas simples. Damos destaque à fala de Carlos ao realizar a divisão $\frac{6}{11}$,que foi a primeira divisão sorteada e onde escolheram o nome para o grupo.

Carlos: Esse (resultado) aqui vai ficar no... Grupo dos quebrados! Infinitos quebrados... Tem repetição de mais de um número em um ciclo infinito.

Nesta classificação também observamos a idéia de pensamento narrativo (Bruner, 1997), dizer que o infinito é quebrado para Carlos quer dizer que o período repete infinitamente mais que ele é composto por mais de um algarismo.

O “grupo dos exatos” contém divisões cujos resultados produzem decimais exatos. Observamos nesta classificação que nossos sujeitos usaram a característica matemática dos números envolvidos para criarem o grupo.

O grupo “inteiros” contém divisões cujos resultados produzem números com a parte decimal nula, ou seja, resultados que a calculadora não emitiu som. Assim como na fase I de nossa pesquisa, observamos que nossos sujeitos também deram destaque aos números inteiros, o que pode estar ligado ao design de nosso micromundo em nossa escolha de não haver som para a parte inteira dos números.

Após agrupar os números, foi solicitado a dupla que criasse mais uma divisão para cada grupo estabelecido, obedecendo às características de cada grupo.

Inteiros quebrados		Período retardado		Infinitos quebrados		Grupo dos exatos		Inteiros	
$\frac{267}{195}$	$\frac{15}{9}$	$\frac{2}{44}$	$\frac{4}{88}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{24}{44}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{50}{8}$	$\frac{15}{3}$	$\frac{32}{4}$

Tabela 14 - Frações equivalentes geradas pela dupla Carlos e Gilmar.

Para cumprir esta etapa nossos sujeitos realizaram cálculos mentalmente para produzirem frações que se encaixassem em cada um dos grupos. O primeiro a falar os números foi Gilmar seguido por Carlos. Destacamos que para gerar as frações que se encaixassem no grupo dos inteiros não se basearam nas frações que já pertenciam ao grupo. Ambos disseram números escolhidos por eles.

Nesta sessão realizamos o encerramento desta fase da pesquisa. Nossos sujeitos foram levados a uma reflexão sobre todo o processo percorrido por eles durante as três sessões da pesquisa.

Nossos sujeitos destacaram que a calculadora pode ser usada por pessoas cegas. Ambos disseram ser um instrumento interessante com potencial para ser utilizado em sala de aula. Carlos e Gilmar puderam reconsiderar suas respostas quanto ao que é número racional. Carlos disse que os fatos de estar fora da sala de aula há muito tempo e não ter mais contato com a matemática lhe causou certa confusão em sua cabeça de início, mas que no decorrer das atividades ele foi relembrando cada conceito.

Consideramos neste capítulo os dados coletados para a realização desta pesquisa, destacando as atividades desenvolvidas, o software que utilizamos, nossa participação nas duas fases do experimento prático e a ligação com nossa fundamentação teórica: objetificação do conhecimento, narrativas, a influência do design da calculadora no desenvolvimento das atividades, os elementos que compuseram nossa ecologia em cada fase e a ligação entre as classificações que nossos sujeitos fizeram com as características dos números racionais.

No próximo capítulo, voltamos à nossas questões de pesquisa, destacando a objetificação do conhecimento, indícios de pensamento narrativo e a influência do design de nossa ferramenta nos dados obtidos. Apresentamos, também, as conclusões de nossa pesquisa.

CAPÍTULO 4

ENCERRAMENTO

Neste capítulo apresentamos as considerações finais de nossa pesquisa, sintetizamos o caminho percorrido - com os objetivos traçados -, explicitamos a metodologia e as ferramentas teóricas utilizadas e elaboramos uma síntese dos resultados encontrados. Além disso, oferecemos as repostas para nossas questões de pesquisa, sugeridas no primeiro capítulo, e refletimos sobre as possíveis implicações desta pesquisa para o ensino de matemática.

O objetivo desta pesquisa é investigar sobre a aprendizagem matemática de pessoas cegas e pessoas com baixa visão, especificamente a aprendizagem de números racionais por meio do som emitido por um software. Nosso olhar estava voltado às diferentes representações dos números racionais e as reações e percepções de nossos sujeitos a estas representações. Para nos guiar em nossas análises buscamos como fundamentação teórica a Teoria da Objetificação proposta por Radford (2006; 2008) em que consideramos os elementos que já faziam parte da vida de nossos sujeitos e a influência destes em suas respostas. Também destacamos a importância do design do micromundo (Papert (1985)) Musi*CAL*colorida na resolução das atividades. Também destacamos indícios de pensamento narrativo nas respostas de nossos sujeitos às atividades, destacando as emoções e histórias expressas nelas (Healy e Sinclair, 2007).

O micromundo Musi*CAL*colorida foi escolhido por explorar, além da representação convencional de uma calculadora, a possibilidade de “tocar” ou “pintar” cada algarismo da parte decimal de um número, explorando, por exemplo, a mesma nota (ou algarismo) por diferentes instrumentos musicais e em diferentes tempos. Para nós a representação sonora foi fundamental para a escolha deste micromundo.

A metodologia utilizada foi o *Design Experiment (Cobb et al, 2003)* que considera que todos os elementos envolvidos no experimento (sujeitos, atividades, pesquisadores, design do micromundo etc.) fazem parte de uma só ecologia, onde a análise dos dados tem que levar em conta todas estas variáveis no processo percorrido para o desenvolvimento da pesquisa.

O enfoque matemático de nossa pesquisa foram os números racionais e suas diferentes representações. Nosso interesse em focar nosso estudo no conceito de números racionais se deve ao fato de alguns autores defenderem que o conceito de números racionais é complexo e que sua aprendizagem envolve diferentes significados/construtos em diferentes perspectivas. Dentre os autores que chamam a atenção para este fato estão Kieren (1976; 1988; 1994) e Nunes e Bryant (2003) que destacam que a compreensão de números racionais envolve a construção de sub-significados/sub-construtos, ou seja, pequenos conceitos que formam o conceito maior.

A experimentação envolveu 8 sujeitos que foram divididos em 6 na primeira fase e 2 na segunda fase. A escolha dos sujeitos foi determinada com a condição de que já tivessem aprendido sobre números racionais. A primeira fase foi em uma instituição especializada na educação de pessoas cegas ou com baixa visão e a segunda fase foi numa OnG que assisti pessoas cegas ou com baixa visão oferecendo-lhes cursos profissionalizantes e de Braille.

4.1 Voltando as questões de pesquisa

Para responder nossas questões de pesquisa reunimos em tabelas as classificações feitas por nossos sujeitos da fase I e II na atividade “organizando”, comparando-as às características dos números racionais. Em nossa análise, identificamos os fatores que motivaram tais agrupamentos, as propriedades destacadas, os indícios de pensamento narrativo, o processo de objetificação, como também a relação com as representações dos números racionais.

<table>
<tr><th>Característica dos números racionais</th><th>Classificação da dupla Josiel e Cauan</th><th>Classificação da dupla Kelly e Victor</th><th>Classificação da dupla Lennon e Gabriel</th><th>Classificação da dupla Carlos e Gilmar</th></tr>
<tr><td>Números inteiros:
16562/13
42768/324</td><td>Grupo do silêncio - chato</td><td>Grupo dos sem som</td><td>Resultados sem som e sem cor</td><td>Inteiros</td></tr>
<tr><td>Decimais exatos:

5/2 315/1000 25/4</td><td>Grupo dos números que terminam.</td><td rowspan="3">Grupo de som estranho/repetitivo</td><td rowspan="4">Resultados com som e com cor</td><td>Grupo dos exatos</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Decimais periódicos simples:

5/3 6/11 8/99 9/999 5689/9999 1/7 5/13</td><td rowspan="2">Grupo dos números com notas repetindo sem parar</td><td>Inteiros quebrados: 89/65 656/495 789/62 425/30 5/3</td></tr>
<tr><td>Infinitos quebrados: 1/7 5689/9999 6/11 8/99 5/13 9/999</td></tr>
<tr><td>Decimais periódicos compostos:

148/9990 1/22 656/495 7/12 425/30 89/65 789/62</td><td>Grupo dos números com notas que as primeiras não repetem, depois outras começam a repetir sem parar</td><td>Grupo de som excelente/com ritmo</td><td>Período retardado:

148/9990 1/22 7/12</td></tr>
</table>

Tabela 15: Síntese dos resultados das 4 duplas.

Em nossa análise, identificamos os fatores que motivaram tais agrupamentos, as propriedades destacadas, os indícios de pensamento narrativo, o processo de objetificação, como também a relação com as representações dos números racionais.

Retomaremos agora as questões que nortearam esta pesquisa:

1) *Quais propriedades dos números racionais são destacadas por esta ferramenta- MusiCALcolorida?*

Nossa proposta de trabalho foi apresentar uma atividade onde nossos sujeitos pudessem separar os números de acordo com o som emitido pelo software Musi*CAL*colorida para cada divisão realizada. Esperávamos que nossos sujeitos pudessem perceber as diferentes características dos números envolvidos. Assim, respondemos a esta questão destacando que:

- Todas as duplas perceberam os números inteiros;
- Algumas duplas conseguiram destacar a diferença entre decimais periódicos simples e compostos;
- Algumas duplas destacaram os decimais exatos.

Lembramos que nem sempre essas características foram expressas da maneira convencional, especialmente pelos adolescentes que associavam estas propriedades com suas experiências com música e através de narrativas e movimentos de seus próprios corpos. Os adultos mesclaram em suas classificações nomenclaturas convencionais com narrativas, o que pode estar relacionado com o fato de Carlos ter sido professor de matemática e de ambos já terem passado pela educação básica. O processo de objetificação aconteceu nas duas fases da pesquisa, mas foi mais evidenciado nas classificações dos adolescentes. Isso pode ter relação com a postura mais despreocupada de nossos sujeitos da fase I, onde notamos que em suas classificações não existia a preocupação se serem julgados por respostas certas ou erradas, o que para os adultos pode ter sido um fator importante em suas classificações.

2) Existe relação entre conhecimento matemático e percepção sonora na atribuição de significados Matemáticos a Números Racionais por estes aprendizes?

Nossos resultados sugerem que os participantes foram construindo esta relação durante suas atividades com Musi*CAL*colorida. Esta relação permitiu associar propriedades matemáticas a regularidades e padrões musicais, trazendo elementos culturais para as descrições dos objetos matemáticos o que, por um lado, enfatizou interpretações musicais e por outro capturou características coerentes matematicamente. Nossos sujeitos foram capazes de guiarem-se apenas pelo som para responder as atividades - com exceção de Lennon que também se guiava pelas cores. Também existiram por parte de alguns sujeitos momentos onde percebemos uma ligação entre o som emitido pela calculadora e os movimentos de seus corpos. Esta ligação entre sujeito (corpo) e o signo (música) é ilustrativa da sintonicidade descrita por Papert e como o “algo sensorial” que é central na perspectiva de Radford sobre aprendizagem e pensamento matemático.

4.2 Comentário

Durante esses dois anos de pesquisa em busca da compreensão do processo cognitivo de aprendizes cegos ou com baixa visão, faço uma reflexão sobre minhas práticas pedagógicas como professora de Matemática. Há dois anos se recebesse em minha sala de aula um aprendiz nessas condições, certamente teria dificuldade para lidar com tal situação e provavelmente aconteceria um descompasso entre o potencial que esses aprendizes têm e o que eu iria explorar.

Esta pesquisa apontou que muito além do tato (que geralmente é mais explorado), a aprendizagem desses aprendizes envolve todo o corpo, ultrapassando a barreira de qualquer sentido – visão, audição, tato, olfato e paladar – envolve o campo perceptivo como um todo. Hoje, com outra perspectiva, entendo ser possível um trabalho com esses aprendizes em uma sala regular desde que lhes sejam ofertadas situações propícias ao seu desenvolvimento perceptual.

A finalização deste trabalho não implica no fechamento desta pesquisa. A oportunidade de pesquisar sobre a aprendizagem de pessoas cegas e pessoas com baixa visão levando em conta não somente a percepção tátil ou sonora, mas o envolvimento de todos os sentidos nos leva a uma busca cada vez mais intensa das possíveis formas de aquisição do conhecimento por parte desses aprendizes. Quanto maior o número de pesquisas desenvolvidas, maior será a possibilidade de que pessoas cegas sejam beneficiadas pela mudança das práticas pedagógicas dos professores, advindas dos resultados obtidos.

O destaque dado a esta pesquisa foi a utilização do computador para o trabalho com números racionais, mas a matemática não se resume só a este tema. Existe ainda um campo vasto de assuntos a serem desenvolvidos com estes aprendizes.

Esperamos que esta pesquisa seja uma contribuição para os educadores e educandos que se interessem pela pesquisa em educação especial.

REFERÊNCIAS

Alunos *cegos da rede estadual passam a utilizar Soroban em aulas de Matemática.* Disponível em: <http://www.educacao.sp.gov.br>. Acesso em: 14 out. 2008.

ANDREZZO, K. L. ***Um estudo do uso de padrões figurativos na aprendizagem de álgebra por alunos sem acuidade visual***. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática).- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005..

BOOTH, W.C. et al. ***A produção do texto científico:*** *trajetória para sua escrita.* São Paulo: Martins Fontes, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC: SEMTEC, 2002.

BRUNER, Jerome. ***Atos de significação***. Tradução: Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997. 130p.

BURTON, S. Mathematics, and its learning, as narrative – A literacy for the the twenty-first century. In BAKER, D., CLAY, J. e FOX, C. (org.). **Changing ways of knowing: in English, mathematics and science**. London: Falmer Press, 1996.

CALORE, A.C.O. ***As "ticas" de "matema" de cegos sob o viés institucional: da integração a inclusão.*** *2008* Rio Claro. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista – UNESP, 2008

CHARALAMBOS Y CHARALAMBOS. ***Developing and testing scale for measuring students' understanding of fractions.*** University of Michigan. 2007.

COBB, Paul; CONFREY, Jere; diSESSA, Andrea; SCHAUBLE, Leona. . *Design Experiments in Education Research*. **Educational Researcher**, v.32. n. 1, 2003.

DRISOSTES, Carlos A. T. (2005). ***Design iterativo de um micromundo com professores de matemática do Ensino Fundamental***. 2005. 300 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) -. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

FERNADES, S. H. A. A. ***Das experiências sensoriais aos conhecimentos matemáticos:*** *uma análise das práticas associadas ao ensino e aprendizagem de alunos cegos e com visão subnormal numa escola inclusiva. 2008* Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

FERNADES, S. H. A. A. ***Uma análise Vygostkiana da apropriação do conceito de Simetria por aprendizes sem acuidade visual***. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontíficia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

HEALY, Lulu; SINCLAIR, Nathalie. If this is our mathematics, what are our stories?. **International Journal Computer for Mathamatical Learning**. **Springer Science + Business Media**. p. 3-21, 2007.

HOYLES, Celia. Microworlds/Schoolworlds: The transformation of innovation, in KEITEL,C. e RUTHVEN, K. (org.). **Learning from Computers Mathematics Education and Technology**. Nato Asi Series F, v. 121, p. 1-17. Berlin: Springer-Verlag,1993.

HOYLES, Celia, NOSS, Richard. Synthesizing mathematical conceptions and their formalization through the construction of a Logo-based school mathematics curriculum**. International Journal of Mathematics, Science and Technology**, v.18 n. 4, p.581-595; 1987.

KARRER, Mônica. ***Articulação entre Álgebra Linear e Geometria:*** *um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica. 2006.* Tese (Doutorado). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo: 2006.

KIEREN, T. E. Multiple views of multiplicative structures. In: HAREL, G.; CONFREY, J. (eds.): ***The development of multiplicative reasoning in the learning of Mathematics****.* New York: State University of New York Press. 1994.

____________. Personal Knowledge of rational numbers**:** its intuitive and formal development**.** In: J. HIEBERT, J.; BERH, M. (eds.): ***Number concepts and operations in the Middle Grades****.* New Jersey: Erlbaum, 1988.

________. **Numbers and measurement:** *mathemathical, cognitive and instructional foundaments of rational number*, Columbus, OHERIC/SMEA, 1976.

LAMON, S.J. ***Teaching Fractions and Rations for Understanding***. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1999.

LIMA, E. L. ***Curso de análise***; Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2008 – 431 p. v. 1 (Projeto Euclides)

NUNES, T., BRYANT, P., PRETZLIK, U. & HURRY,J.:***The effect of situations on children' s understanding of fractions****.* Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics. Oxford, June, 2003.

OCHAITA, E. e ROSA, A. Percepção, ação e conhecimento nas crianças cegas. *In:* COOL, C. PALACIOS, J. MARCHESI, A. (Org.). ***Desenvolvimento psicológico e educação:*** necessidades educativas especiais e aprendizagem escolar. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. v.3.

PAPERT, S.: ***Logo:*** *computadores e educação*. Trad.: Valente, J. A.; Bitelman, B. e Ripper, A. V. 2. ed. São Paulo: Editora Brasiliense, 1986.

______ **A máquina das crianças:** repensando a escola na era da informática**.** Trad. Costa, S. Porto Alegre: Artes Gráficas, 1994.

RADFORD, L. *Elementos de uma teoria de la objetivación*. **Relime** – Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Publicación Oficial de Investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Número Especial., 2006

RADFORD, L.. Palestra "***Uma perspectiva Sensório Cultural para Educação Matemática***". Programa de pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo. São Paulo, 2006.

RODRIGUES, M.A.S. ***Calculadora Colorida e Musical:*** *uma Ferramenta para explorar números racionais****.*** In: **EBRAPEM**: Anais. Rio Claro, v.1.p.1-10, 2008.

RODRIGUES, W.R. ***Números Racionais:*** *um estudo das concepções dos alunos após o estudo formal****.*** *2005* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática).Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

SÃO PAULO (Estado). ***Proposta Curricular do Estado de São Paulo***. São Paulo: Secretaria de Estado da Educação, 2008.

SINCLAIR, Nathalie, LILJEDAHL Peter, ZAZKIS Rina. *A coloured window on pre-service teachers' conceptions of rational numbers****. International Journal of Computers for Mathematical Learning****.* vol.11, n.2, p. 177-203, 2006

SMOLE, K.C.S., DINIZ, M.I.S.V**.: Matemática –** volume 1- 1ª série – ensino médio – 3. ed. São Paulo: Saraiva, 2003.

TORRES, Í.; CORN, A. Quando houver crianças deficientes da visão em sua sala de aula: sugestões para professores. **Revista Benjamin Constant**. Rio de Janeiro, 1998.

VALENTE, J. A. e FREIRE, M. P. (orgs.): ***Aprendendo para a vida:*** *os computadores na sala de aula*. São Paulo: Cortez, 2001.